

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIHUAHUA
FACULTAD DE INGENIERÍA
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
CHIHUAHUA**

**OPTIMIZACIÓN DE MÉTODOS DE RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES
MEDIANTE ALGORITMOS BIOINSPIRADOS**

POR:

GERARDO IVÁN TORRES CISNEROS

**TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL
GRADO DE MAESTRO EN INGENIERÍA EN COMPUTACIÓN**



Optimización de Métodos de Reconstrucción de Señales Mediante Algoritmos Bioinspirados. Tesis presentada por Gerardo Iván Torres Cisneros como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ingeniería en Computación, ha sido aprobado y aceptado por:

M.I. Fabián Vinicio Hernández Martínez
Director de la Facultad de Ingeniería

M.I. Rodrigo de la Garza Aguilar
Secretario de Investigación y Posgrado

M.S.I Karina Rocío Requena Yáñez
Coordinadora Académica

Dr. Alain Manzo Martínez
Director de Tesis

Mes de octubre del año 2025

COMITÉ

Dr. Alain Manzo Martínez
Dra. Graciela María de Jesús Ramírez Alonso
Dr. Luis Fernando Gaxiola Orduño
Dra. Vania Carolina Álvarez Olivas



03 de noviembre de 2025.

ING. GERARDO IVÁN TORRES CISNEROS

Presente. -

En atención a su solicitud relativa al trabajo de tesis para obtener el grado de Maestría en Ingeniería en Computación, nos es grato transcribirle el tema aprobado por esta Dirección, propuesto y dirigido por el director Dr. Alain Manzo Martínez para que lo desarrolle como Tesis, con el título **“Optimización de métodos de reconstrucción de señales mediante algoritmos bioinspirados”**.

Índice de Contenido

1. Introducción
 - 1.1 Planteamiento del problema y pregunta de investigación
 - 1.2 Justificación
 - 1.3 Objetivo general
 - 1.4 Objetivos específicos
 - 1.5 Hipótesis
2. Antecedentes
 - 2.1 Antecedentes históricos
 - 2.2 Trabajo Relacionado
3. Marco teórico
 - 3.1 Métodos de Reconstrucción de Señales
 - 3.2 Análisis de Fourier
 - 3.3 Fenómeno de Gibbs
 - 3.4 Teorema de muestreo y reconstrucción
 - 3.5 Método de Prony
 - 3.6 Métricas de evaluación del error
 - 3.7 Esquema de majorización–minimización (MM)
 - 3.8 Algoritmos bioinspirados: GA, EGA y PSO
4. Metodología
 - 4.1 Revisión bibliográfica y análisis del estado del arte
 - 4.2 Desarrollo del método



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
CHIHUAHUA

5. Resultados

5.1 Caso 1: Reducción del fenómeno de Gibbs con MM/IRLS + GA

5.2 Caso 2: Optimización paramétrica con método de Prony asistido por Algoritmos Genéticos

6. Conclusiones y trabajo futuro

A T E N T A M E N T E

"naturam subiecit aliis"

EL DIRECTOR

M.I. FABIÁN VINICIO HERNÁNDEZ
MARTÍNEZ

FACULTAD DE
INGENIERÍA
U.A.CH.



SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN
Y POSGRADO

M.I. RODRIGO DE LA GARZA AGUILAR

DIRECCIÓN

Índice

Índice de figuras	4
Índice de tablas	6
1. Introducción	11
1.1 Planteamiento del problema y pregunta de investigación	12
1.2 Justificación	13
1.3 Objetivo general	14
1.4 Objetivos específicos	15
1.5 Hipótesis	15
2. Antecedentes	17
2.1 Antecedentes históricos	17
2.1.1 Análisis de Fourier	17
2.1.2 Fenómeno de Gibbs	17
2.1.3 Transformada de Fourier Discreta (DFT) y Transformada Rápida de Fourier (FFT)	18
2.1.4 Método Prony y variantes del método Prony	18
2.1.5 Algoritmos bioinspirados (GA y PSO)	18
2.2 Trabajo Relacionado	19
3. Marco teórico	22
3.1 Métodos de Reconstrucción de Señales	22
3.2 Análisis de Fourier	22
3.2.1 Transformada de Fourier Discreta (DFT)	23
3.2.2 Transformada Rápida de Fourier (FFT)	24
3.3 Fenómeno de Gibbs	25
3.4 Teorema de muestreo y reconstrucción	25
3.5 Método de Prony	29
3.6 Métricas de evaluación del error	31

3.7 Esquema de mayorización–minimización (MM)	31
3.8 Algoritmos bioinspirados: GA, EGA y PSO	34
3.8.1 Algoritmos Genéticos (GA) de codificación real	35
3.8.2 Enhanced Genetic Algorithm (EGA)	36
3.8.3 Particle Swarm Optimization (PSO)	37
3.8.4 ¿Cuándo usar GA/EGA/PSO en esta tesis?	37
4. Metodología	39
4.1 Revisión bibliográfica y análisis del estado del arte	40
4.2 Desarrollo del método	40
Caso 1: Reducción del fenómeno de Gibbs con MAE (ℓ_1) + MM/IRLS y refinamiento por Algoritmo Genético	41
Caso 2: Optimización paramétrica con método de Prony asistido por Algoritmos Genéticos	49
5. Resultados	53
5.1 Caso 1: Reducción del fenómeno de Gibbs con MM/IRLS + GA	53
5.2 Caso 2: Optimización paramétrica con método de Prony asistido por Algoritmos Genéticos	58
5.2.1 Validación con EEG real (VEPCON)	67
6. Conclusiones y trabajo futuro	73

Índice de figuras

1.	Onda cuadrada y suma parcial con $N = 1000$. Se observan sobreimpulsos/subimpulsos de Gibbs junto a cada salto; las ondulaciones decrecen al alejarse y se concentran cerca de la discontinuidad.	26
2.	Sobrepasso relativo (%) vs. número de términos N . La curva converge al límite teórico del fenómeno de Gibbs ($\sim 8.9\%$ del salto) y la variación entre valores sucesivos disminuye al crecer N	26
3.	Vista local para $N = 50$ cerca de la discontinuidad. Patrón alternante de sobreimpulso/subimpulso con amplitud decreciente; el espaciamiento entre ondulaciones es mayor que para N grandes ($\sim 1/N$).	26
4.	Esquema de muestreo y reconstrucción de una señal con componentes senoidales de banda limitada con $F_{\max} = 20\text{Hz}$ (<i>máxima frecuencia presente</i>) y muestreo uniforme $f_s = 100\text{Hz}$ ($T_s = 10\text{ms}$). Paneles: arriba-izq., señal continua; arriba-der., instantes de muestreo; abajo-izq., secuencia discreta; abajo-der., reconstrucción por interpolación sinc y LPF (filtro pasa-bajas) ideal al cumplirse Nyquist ($f_s > 2F_{\max}$), en $0 \leq t \leq 0.5\text{s}$	28
5.	Pipeline experimental del Caso 1.	45
6.	Pipeline de la variante PSO para reducción de Gibbs.	48
7.	Pipeline del Caso 2 (Prony asistido por GA/EGA).	53
8.	Caso 1 (MM/IRLS + GA). Comparación señal objetivo vs. reconstrucción optimizada con sobreimpulso = 6.94 %.	54
9.	Arriba: señal original y reconstrucción optimizada (MM/IRLS + GA). Abajo: error temporal correspondiente (escala unitaria).	55
10.	Zoom cerca de la discontinuidad: ℓ_1 (estimación inicial MM/IRLS) vs. GA (MM+objetivo multicriterio). Se observa una disminución del pico y de las oscilaciones locales. . .	56
11.	Caso 1 (PSO, ECM ponderado). Señal objetivo (negro), reconstrucción antes de optimización (azul punteada, 9.10 % sobreoscilación) y después de PSO (naranja punteada, 8.46 %). Se utilizó el mismo truncamiento espectral que en GA ($N_F = k_{\max} = M/2$).	57

12.	Perfil de desempeño (Dolan–Moré) en la señal completa. EGA domina para un amplio rango de τ , seguido de GA; MPM y TLS quedan rezagados.	58
13.	SNR_{out} en función de SNR_{in} (señal completa). EGA mantiene la mejor calidad de salida a lo largo de los niveles de ruido.	59
14.	SNR_{out} frente al orden verdadero p_{true} (señal completa). Las variantes genéticas muestran mejor adaptación al incremento de complejidad.	60
15.	Valor del objetivo (RMS) vs. SNR_{in} en la señal completa. EGA logra los errores más bajos a lo largo de los niveles.	61
16.	Valor del objetivo (RMS) vs. orden estimado p_{est} . La ventaja de EGA frente a GA se mantiene para $p_{\text{est}} \in \{2, 3, 4, 5\}$	62
17.	Señal original vs. medición ruidosa (ejemplo con $\text{SNR}_{\text{in}} \approx 4.8 \text{ dB}$).	63
18.	Original vs. reconstrucción con Prony (EGA) en toda la duración.	63
19.	Acercamiento de 0–300 ms: original vs. reconstrucción (EGA).	64
20.	Reconstrucción con Prony a partir de datos ruidosos (ejemplo sintético).	65
21.	Sub-01 (VEPCON, rostros). ERP objetivo en el canal B9 (línea azul) y reconstrucciones paramétricas obtenidas con EGA–Prony (naranja), GA–Prony (verde) y MPM (rojo) para un modelo de orden $p = 8$. El eje horizontal muestra el tiempo (0–0.4 s) y el eje vertical la amplitud en voltios.	70
22.	Sub-01 (VEPCON, condición rostros). ERP objetivo en el canal B9 (azul) y reconstrucción obtenida con EGA–Prony (naranja) para un modelo de orden $p = 8$. Se observa que EGA reproduce con alta fidelidad la forma de onda del ERP a lo largo de todo el intervalo 0–0.4 s.	71
23.	Sub-01 (VEPCON, condición rostros). ERP objetivo en el canal B9 (azul) y reconstrucción obtenida con GA–Prony (naranja) para un modelo de orden $p = 8$. La reconstrucción captura la tendencia global del ERP, aunque presenta ligeras discrepancias en las oscilaciones tempranas.	71
24.	Sub-01 (VEPCON, condición rostros). ERP objetivo en el canal B9 (azul) y reconstrucción obtenida con el método MPM (naranja) para un modelo de orden $p = 8$. La aproximación es más suave y muestra un ajuste menos preciso en las variaciones rápidas del ERP en comparación con los estimadores evolutivos.	72

Índice de tablas

1.	Trabajos relacionados relevantes para esta investigación	21
2.	Hiperparámetros de las variantes GA y EGA empleadas en el método Prony.	51
3.	Velocidad de convergencia en generaciones (G) para GA–Prony vs. EGA–Prony bajo distintos SNR_{in} . Se reportan media \pm DE y rango [mín, máx]. La última co- lumna indica la reducción porcentual de G de EGA respecto a GA.	65
4.	EGA (p _{est} =2, p _{true} =5). Resumen de métricas con $n = 40$ corridas independientes.	66
5.	Sub-01: valor real y estimaciones de GA, MPM y EGA (mejor por parámetro en negritas).	68
6.	Sub-02: valor real y estimaciones de GA, MPM y EGA (mejor por parámetro en negritas).	69



Dedicatoria

Para Rosy, Rubén, Pablo, Daniel y Rocío.



Agradecimientos

A mis padres, de manera insuficiente en estas líneas, ya que no alcanzan todas las letras de esta tesis para agradecerles todo el cariño y apoyo incondicional que me han brindado, y que sin ellos, mi curso por este posgrado, y todos los pasos previos para llegar a él, no hubieran sido posibles.

A Michelle, por inspirarme y brindarme su apoyo emocional e intelectual cada vez que lo necesité. Agradezco a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chihuahua, a mis revisores por tomarse el tiempo para asesorarme y ayudarme con el presente trabajo.

A mi director de Tesis, el Dr. Alain Manzo Martínez por los conocimientos compartidos, sus consejos y el apoyo para realizar este trabajo y trabajos derivados, así como por su paciencia y disposición en todo momento que lo consulté.

Agradezco sinceramente al Maestro Fabian Vinicio Hérnandez Martinez y al Maestro Arión Juarez Menchaca, por todo su apoyo, consejos y comprensión que me brindaron durante mi estancia en el posgrado.

Agradezco al Dr. Fernando Martínez Reyes y a la Secretaría de Investigación y Posgrado por permitirme cursar este posgrado y brindarme el apoyo y todo lo necesario para llevarlo a cabo.

Un agradecimiento muy especial al Maestro Rodrigo de la Garza por brindarme su apoyo y amistad durante estos años.

A los Maestros de la Maestría en Ingeniería en Computación, en especial a aquellos que me brindaron sus conocimientos.



Resumen

Este trabajo propone algoritmos metaheurísticos inspirados en los procesos y comportamientos de los sistemas biológicos en la naturaleza, con la finalidad de optimizar dos métodos de reconstrucción de señales, el *análisis de Fourier* y el *método Prony*. Existen diversos modelos que calculan coeficientes y parámetros en el análisis de Fourier y el método Prony, respectivamente; sin embargo, ambos presentan limitaciones relevantes en ciertas aplicaciones. En décadas recientes, se han empleado algoritmos metaheurísticos para mitigarlas y maximizar precisión, exactitud y sensibilidad en la reconstrucción de señales, por su simplicidad y buenos resultados. El objetivo de esta tesis es optimizar ambos enfoques mediante algoritmos bioinspirados. Se emplean metaheurísticas poblacionales —*Algoritmos Genéticos* y *Optimización por enjambre de partículas*— para obtener coeficientes de Fourier y estimar parámetros en Prony. La validación comprende señales sintéticas (diversa complejidad y ruido) y registros reales de electroencefalogramas. Para el fenómeno de Gibbs se utilizan costos multicriterio que reducen el sobreimpulso/subimpulso y el error de reconstrucción (error cuadrático medio y error absoluto medio), ajustando coeficientes espectrales con restricciones mediante búsqueda evolutiva. En la reconstrucción paramétrica, integrar Prony con algoritmos genéticos estabiliza la estimación de amplitudes, amortiguamientos, frecuencias y fases bajo ventanas cortas y ruido elevado.

Los resultados muestran reducciones consistentes del sobreimpulso/subimpulso y del error de reconstrucción global sin pérdida apreciable de resolución espectral. En el modelo paramétrico se observa menor error y mayor relación señal–ruido que con métodos tradicionales (lápiz de matrices y mínimos cuadrados totales). En electroencefalogramas reales, los beneficios se trasladan sin ajustes adicionales y se preserva la interpretabilidad modal. En conjunto, los hallazgos respaldan el objetivo de optimizar la reconstrucción en ambos casos e indican utilidad práctica en contextos biomédicos con registros breves o ruidosos.

Palabras clave: fenómeno de Gibbs, reconstrucción espectral, método de Prony, algoritmos genéticos, error cuadrático medio, relación señal–ruido.



Abstract

This thesis proposes metaheuristic algorithms inspired by biological systems in nature to optimize two signal reconstruction methods: *Fourier analysis* and the *Prony method*. Various models compute coefficients and parameters for Fourier analysis and Prony, respectively; however, both exhibit relevant limitations in certain applications. In recent decades, metaheuristic algorithms have been employed to mitigate these limitations and to maximize precision, accuracy, and sensitivity in signal reconstruction, owing to their simplicity and strong empirical performance. The goal of this thesis is to optimize both approaches using bio-inspired algorithms. Population-based metaheuristics—*Genetic Algorithms* and *Particle Swarm Optimization*—are employed to obtain Fourier coefficients and to estimate Prony parameters. Validation includes synthetic signals (with varying complexity and noise) and real electroencephalogram (EEG) recordings. For the Gibbs phenomenon, multi-criteria cost functions are designed to reduce overshoot/undershoot and reconstruction error (mean squared error and mean absolute error) by adjusting spectral coefficients under constraints via evolutionary search. In the parametric reconstruction setting, integrating Prony with genetic algorithms stabilizes the estimation of amplitudes, damping factors, frequencies, and phases under short windows and high noise.

The results show consistent reductions in overshoot/undershoot and in the global reconstruction error without appreciable loss of spectral resolution. In the parametric model, lower error and higher signal-to-noise ratio are observed compared to traditional methods (Matrix Pencil and Total Least Squares). In real EEGs, the benefits transfer without additional tuning and modal interpretability is preserved. Overall, the findings support the objective of optimizing reconstruction in both cases and indicate practical utility in biomedical contexts with brief or noisy recordings.

Keywords: Gibbs phenomenon, spectral reconstruction, Prony method, genetic algorithms, mean squared error, signal-to-noise ratio.



1. Introducción

La reconstrucción precisa de señales a partir de observaciones finitas y ruidosas es un problema central en el procesamiento de señales, con implicaciones directas en telecomunicaciones, bioingeniería, sistemas eléctricos y neurociencia. En este trabajo abordamos dicho problema a través de dos casos de estudio: (i) la reducción del fenómeno de Gibbs en reconstrucciones con series truncadas, y (ii) la optimización de la reconstrucción paramétrica mediante el método de Prony asistido por algoritmos genéticos (GA).

En el **primer caso de estudio**, nos enfocamos en el *fenómeno de Gibbs*, es decir, el sobre/subimpulso que aparece cerca de discontinuidades cuando se emplean series truncadas. Este fenómeno, ampliamente documentado, degrada la calidad local de la aproximación y puede inducir errores sistemáticos en etapas posteriores de análisis [1]. En lugar de recurrir únicamente a filtros espectrales o factores de atenuación, planteamos el problema como una tarea de *optimización* de los coeficientes, con miras a reducir el sobreimpulso sin sacrificar la resolución global. Este enfoque fue formalizado y evaluado en el cuerpo de la tesis como *primer caso de estudio*.

El **segundo caso de estudio** surge de una necesidad distinta pero complementaria: reconstruir señales que se modelan mejor como sumas de exponenciales amortiguadas (p. ej., trenes de senoidales amortiguados), donde los métodos paramétricos ofrecen ventajas frente a aproximaciones puramente espectrales. El *método de Prony* y su familia (p. ej., variantes basadas en lápiz matricial y técnicas de mínimos cuadrados totales) han demostrado ser eficaces para estimar frecuencias, amortiguamientos y amplitudes a partir de datos ruidosos [2–4]. No obstante, el desempeño práctico depende de elecciones delicadas (orden del modelo, selección de polos, inicializaciones) y la presencia de ruido puede deteriorar la estabilidad numérica y sesgar los estimadores.

Para robustecer la estimación, proponemos integrar *algoritmos genéticos* (GA) como optimizadores globales en la etapa no lineal de ajuste de parámetros de Prony. En particular, diseñamos dos esquemas: **GA-Prony** (búsqueda global sobre el espacio de polos y amplitudes con restricciones de estabilidad) y **EGA-Prony** (una versión mejorada con operadores evolutivos y criterios de di-



versidad poblacional) inspirados en la literatura clásica y reciente de metaheurísticas [5, 6]. En ambos casos, la función objetivo combina el error de reconstrucción en el dominio temporal con regularizadores que penalizan configuraciones físicamente inverosímiles; además, se controla el orden efectivo del modelo para evitar un sobreajuste.

Contribuciones específicas del segundo caso de estudio.

1. **Formulación** de un esquema GA para el ajuste conjunto de frecuencias, amortiguamientos y amplitudes en Prony, con restricciones de estabilidad y selección de orden asistida.
2. **Evaluación sistemática en señales simuladas**, abarcando distintos niveles de relación señal-ruido (SNR), muestreos y órdenes verdaderos, comparando contra referentes de la familia Prony (LS-Prony, Matrix Pencil y variantes TLS) [2–4].
3. **Validación con señales reales de EEG**, utilizando un conjunto público de potenciales evocados visuales (VEPCON), para verificar que las mejoras observadas en simulaciones se traduzcan en escenarios reales de neuroseñales. [7].

Los resultados muestran que la hibridación Prony y Algoritmos Genéticos (Prony+GA) puede incrementar la robustez frente a ruido y mejorar la consistencia en la recuperación de polos relevantes, particularmente cuando el orden del modelo es incierto y cuando coexisten modos cercanos en frecuencia y/o con amortiguamientos bajos. Esta aproximación complementa el primer caso de estudio: mientras la optimización de la reducción en el fenómeno de Gibbs mejora la calidad local en aproximaciones espectrales con discontinuidades, la optimización GA-Prony potencia la recuperación de componentes oscilatorios amortiguados cuando el modelo paramétrico es más adecuado.

1.1 Planteamiento del problema y pregunta de investigación

Las técnicas de reconstrucción espectral presentan limitaciones bien conocidas cerca de discontinuidades, donde se manifiesta el fenómeno de Gibbs con sobre/subimpulso que no desaparece aún al incrementar el número de términos, afectando la utilidad de las señales reconstruidas en dominios donde las transiciones abruptas son informativas [1, 8]. Paralelamente, en problemas donde



la señal se representa mejor mediante *modelos paramétricos* (p. ej., sumas de exponenciales), los métodos tipo Prony ofrecen ventajas de resolución, pero muestran sensibilidad al ruido, al orden del modelo y a inestabilidades numéricas [2–4].

Pregunta de investigación: ¿Es posible **mejorar la calidad de reconstrucción de señales** mediante (i) un enfoque de **optimización** para mitigar el fenómeno de Gibbs en aproximaciones espectrales, y (ii) una **hibridación Prony+GA** que incremente la exactitud y robustez en la estimación de parámetros, con evidencia tanto en simulaciones como en señales reales de EEG?

1.2 Justificación

La calidad de una señal reconstruida no solo se mide por su error promedio, sino por la utilidad que ofrece para la toma de decisiones en contextos reales. En ingeniería, medicina y ciencias aplicadas, decisiones críticas dependen de información local (cambios bruscos, transitorios, pícos) y de estructuras oscilatorias débiles pero persistentes. Esta tesis parte de esa premisa: mejorar la reconstrucción significa atender, simultáneamente, la calidad de reconstrucción *local* ante discontinuidades y la calidad de reconstrucción *paramétrica* cuando los datos responden a modelos oscilatorios amortiguados.

En el **primer caso de estudio**, el fenómeno de Gibbs introduce sobreimpulso/subimpulso en la vecindad de discontinuidades, afectando la interpretabilidad de indicadores locales y sesgando medidas posteriores (detectores de eventos, estimadores de pendiente, umbrales de alarma). Aun con más términos en la serie, el fenómeno persiste, y los enfoques que emplean únicamente filtros o ventanas pueden degradar el contenido global de la señal. Por ello, se propone un planteamiento de *optimización* que, con restricciones explícitas, reduzca el sobreimpulso/subimpulso sin penalizar en exceso el error global; este enfoque equilibra la preservación de detalles relevantes con la estabilidad de la reconstrucción y se alinea con recomendaciones metodológicas clásicas y contemporáneas sobre el equilibrio entre resolución y suavidad de la señal. [1].

En el **segundo caso de estudio**, cuando la señal se describe mejor como la suma de exponenciales



amortiguadas (p. ej., componentes senoidales con decaimiento), la familia de métodos de Prony permite estimar frecuencias, amortiguamientos y amplitudes con alta resolución; sin embargo, su desempeño práctico es sensible al ruido, a la selección de orden y a la proximidad de polos. En escenarios reales, pequeñas variaciones pueden traducirse en inestabilidad numérica o en soluciones físicamente inverosímiles. Integrar *algoritmos genéticos* en la etapa no lineal ofrece una exploración global del espacio de parámetros, con mecanismos para mantener la diversidad, imponer restricciones de estabilidad y evitar mínimos locales, mejorando la robustez del ajuste.

La validación dual, tanto en señales simuladas y en señales reales de EEG (VEPCON), es necesaria por dos razones. Primero, las simulaciones permiten controlar el orden verdadero, la SNR y la separación modal, cuantificando con precisión el impacto de las decisiones de modelado. Segundo, el EEG real introduce artefactos, no estacionariedad y variabilidad fisiológica que desafían cualquier método; demostrar un desempeño consistente en este entorno es un requisito para la transferencia a aplicaciones clínicas y neurocientíficas, donde la recuperación de componentes oscilatorios relevantes (p. ej., bandas visuales) es muy importante para obtener resultados y diagnósticos confiables.

Este proyecto de tesis aborda dos *fuentes dominantes de degradación* en la reconstrucción de señales: errores localizados por truncamiento espectral y sensibilidad en la estimación de parámetros en señales descritas por sumas de exponenciales complejas amortiguadas. Atender a ambas, con criterios explícitos de control del error y validación en datos reales, eleva la *utilidad práctica* de las reconstrucciones y sienta bases para *pipelines* más confiables en contextos donde los costos de falsas alarmas, diagnósticos erróneos o pérdidas operativas son significativos.

1.3 Objetivo general

Optimizar métodos de reconstrucción de señales en dos casos: (i) **reducción del fenómeno de Gibbs** en aproximaciones espectrales, y (ii) **optimización de la reconstrucción paramétrica mediante Prony+GA**, demostrando mejoras en la calidad (reconstrucción y/o parámetros) en *señales simuladas y validación con señales reales de EEG*.



1.4 Objetivos específicos

Caso de estudio 1: Reducción del fenómeno de Gibbs

1. Analizar cuantitativamente el sobreimpulso/subimpulso cerca de discontinuidades en series truncadas, mediante métricas locales (p. ej., *overshoot peak*, norma L_∞ en vecindades y error local integrado).
2. Formular un problema de optimización que ajuste parámetros de reconstrucción (coeficientes y pesos) para reducir el fenómeno de Gibbs, con restricciones que limiten la degradación del error global.
3. Comparar con enfoques de referencia y cuantificar la relación entre *calidad de reconstrucción local y error global* [1].

Caso de estudio 2: Optimización Prony+GA

1. Diseñar un esquema Prony+GA que optimice frecuencias, amortiguamientos y amplitudes bajo restricciones de estabilidad de polos y selección de orden.
2. Evaluar en señales simuladas la exactitud de reconstrucción y la recuperación de parámetros (error en frecuencias/amortiguamientos; RMSE/MAE/SMAPE de la señal), comparando con LS/TLS/MPM
3. Validar en EEG real (VEPCON) que el esquema propuesto mantiene o mejora la recuperación de componentes oscilatorios relevantes y la consistencia temporal/frecuencial.

1.5 Hipótesis

Hipótesis H1 (Gibbs). Un enfoque de optimización apropiadamente regularizado **reduce significativamente** el sobreimpulso/subimpulso local en la vecindad de discontinuidades, *sin aumentar de forma sustancial* el error global de reconstrucción respecto a métodos espectrales de referencia.



Hipótesis H2 (Prony+GA).

- La hibridación **Prony+GA** **mejora la exactitud y robustez** en la estimación de parámetros (frecuencias, amortiguamientos y amplitudes) frente a LS/TLS/MPM, especialmente bajo ruido y orden de modelo incierto.
- La hibridación **Prony+GA** conserva o mejora la recuperación de componentes fisiológicamente plausibles frente a LS/TLS/MPM en señales reales de EEG.



2. Antecedentes

2.1 Antecedentes históricos

En esta sección se presentan, en orden cronológico, los trabajos que sustentan los dos ejes de esta tesis. El primer eje parte del análisis de Fourier (inicios del siglo XIX) y de la comprensión del sobreimpulso/subimpulso característico del fenómeno de Gibbs (finales del siglo XIX), y avanza hacia la formalización digital mediante la transformada discreta y su algoritmo rápido (mediados del siglo XX), que habilitaron las aproximaciones espectrales truncadas que se utilizan hoy. El segundo eje aborda la modelación paramétrica de señales como sumas de exponentiales amortiguadas a partir del método de Prony (finales del siglo XVIII) y su desarrollo moderno (décadas de 1980–1990) con variantes robustas, para desembocar en enfoques de optimización bioinspirada (desde la década de 1970 para algoritmos genéticos y, más tarde, en 1995 para enjambre de partículas) que esta tesis emplea para mitigar el fenómeno de Gibbs y mejorar la estimación modal.

2.1.1 Análisis de Fourier

Desarrollado inicialmente por Jean-Baptiste Joseph Fourier en 1822, el análisis de Fourier ha sido fundamental en el campo del procesamiento de señales [9]. Su capacidad para descomponer funciones periódicas en sumas de senos y cosenos es crucial para la reconstrucción de señales y también tiene relevancia en múltiples áreas de la ingeniería y las ciencias.

2.1.2 Fenómeno de Gibbs

El Fenómeno de Gibbs fue observado inicialmente por Albert A. Michelson, a finales del siglo XIX, en sus experimentos con series trigonométricas [10] y posteriormente teorizado por Josiah Willard Gibbs [11]. Se caracteriza por sobreimpulso y subimpulso alrededor de discontinuidades en la señal reconstruida. Estas oscilaciones persisten incluso cuando aumenta el número de términos en la expansión de Fourier, aunque su magnitud tiende a disminuir.



2.1.3 Transformada de Fourier Discreta (DFT) y Transformada Rápida de Fourier (FFT)

La DFT fue conceptualizada para señales discretas, y su implementación computacional se optimizó significativamente con la introducción de la FFT por Cooley y Tukey en 1965 [12], hecho que revolucionó el análisis digital de señales por su eficiencia.

2.1.4 Método Prony y variantes del método Prony

El método de Prony, propuesto por Gaspard Riche de Prony a finales del siglo XVIII, estima el contenido modal de una señal modelada como una suma de exponenciales amortiguadas (o no amortiguadas), recuperando amplitudes, atenuaciones, frecuencias y fases a partir de datos muestrados. En su forma clásica, la tarea no lineal se linealiza resolviendo primero un sistema de predicción lineal para obtener el polinomio característico y, posteriormente, sus raíces para recuperar los parámetros modales. Este paradigma ha sido sintetizado y revisado en la literatura reciente [4] y aplicado a filtrado biomédico [13].

Para mejorar el comportamiento numérico en presencia de ruidos o registros cortos, se emplean variantes como *Total Least Squares* (TLS) y el *Matrix Pencil Method* (MPM). TLS sustituye las ecuaciones normales por una factorización SVD del sistema aumentado, minimizando la perturbación conjunta en la matriz y los datos [3], mientras que MPM formula un lápiz generalizado a partir de matrices de Hankel y recupera los polos como autovalores generalizados, mostrando tolerancia al ruido cuando las frecuencias o las atenuaciones están cercanas [2]. Estas variantes siguen el enfoque original de Prony, pero hacen más robusta la estimación modal en condiciones realistas.

2.1.5 Algoritmos bioinspirados (GA y PSO)

Los algoritmos genéticos emergieron en la década de 1970 y la optimización por enjambre de partículas en 1995 [14], aportando búsqueda global y robustez frente a no convexidad y ruido.

Estos algoritmos bioinspirados han demostrado ser eficaces en problemas de estimación de parámetros con espacios de búsqueda no convexos y multimodales. Los **Algoritmos Genéticos (GA)**: emplean una población de soluciones codificadas y operadores de selección, cruce y mutación para minimizar una función de costo, favoreciendo la exploración global y la diversidad; su uso



en estimación sinusoidal/exponencial es amplio y presenta resultados competitivos [5, 6]. **Particle Swarm Optimization (PSO)**: modela una comunidad de partículas que actualizan sus posiciones y velocidades guiadas por el mejor desempeño individual y colectivo; su sencillez y buen equilibrio exploración-explotación lo hacen atractivo en el ajuste de modelos y parametrización de sistemas [14]. En problemas Prony-like, tanto GA como PSO permiten optimizar directamente en el espacio modal, evitando etapas frágiles (p. ej., resolución de raíces mal condicionadas) y manteniendo la interpretabilidad del modelo.

2.2 Trabajo Relacionado

Dentro de la revisión de la literatura, se identifican dos líneas convergentes con esta tesis: (i) la reducción del fenómeno de Gibbs en reconstrucciones por series de Fourier, y (ii) la optimización de la reconstrucción y estimación modal en métodos tipo Prony mediante metaheurísticas. La **Tabla 1** sintetiza los estudios considerados y sus componentes relevantes para esta investigación.

Reducción del fenómeno de Gibbs. En [15], se aborda la reducción del fenómeno de Gibbs por interpolación con funciones de base radial (RBF) en 1D, combinando funciones base no suaves cerca de discontinuidades con aproximaciones lineales por partes en regiones suaves. Los autores reportan reducciones de oscilación del orden del 8 % del salto de discontinuidad, relativamente estables respecto al número de centros utilizados; no obstante, la elección del parámetro de forma y la localización de las vecindades no suaves influyen de manera sensible en el desempeño. Más recientemente, [16] mostró que, si en lugar de ajustar la expansión clásica se optimizan directamente los coeficientes de la serie truncada minimizando el error absoluto medio entre señal y reconstrucción, el sobreimpulso tipo Gibbs puede reducirse hasta $\sim 4\%$ del salto de la señal; al incorporar términos de suavidad o regularización leve se atenúan ondulaciones residuales sin degradar apreciablemente la resolución. *En señales biomédicas*, [17] evidencian que objetivos robustos basados en ℓ_1 dentro del esquema de Fourier disminuyen el overshoot y mejoran la separación de componentes ECG, reforzando la utilidad de funciones costo robustas. *En paralelo*, técnicas de re-sumación como el ε -algorithm aceleran la convergencia y atenúan ondulaciones cercanas a discontinuidades [18]. Asimismo, en [19] se aplican algoritmos genéticos al diseño de filtros FIR de fase lineal con opti-



mización simultánea del error medio y de las ondulaciones en banda de paso/banda de atenuación, mostrando mejoras frente a ventanas clásicas (Hamming, Hanning). Estos resultados refuerzan el papel de las metaheurísticas en diseños sensibles a oscilaciones y evidencian el equilibrio entre reducción de sobreimpulso, sesgo espectral y costo computacional.

Prony, variantes robustas y metaheurísticas. Las revisiones contemporáneas de Prony sintetizan formulaciones polinómicas y sus extensiones [4], mientras que mínimos cuadrados totales [3] y el método del lápiz de matrices [2] mejoran la estabilidad en presencia de ruido y en registros cortos. Aun así, la estimación modal puede verse afectada por la selección del orden del modelo, la longitud de ventana y la correlación del ruido; prácticas comunes incluyen penalizaciones de información, truncamiento singular y promediado sobre ventanas, con beneficios parciales (véase **Tabla 1**). Adicionalmente, el marco de mayorización–minimización (MM) ofrece una vía sistemática para diseñar funciones objetivo y restricciones con descenso monótono y garantías de convergencia [20]. En paralelo, la optimización inteligente se ha aplicado con éxito a la estimación de parámetros sinusoidales [6] y a problemas de parametrización bajo armónicos utilizando PSO [21], aportando búsqueda global, tolerancia a no convexidad y explicitación de restricciones (p. ej., cotas físicas y regularización). A cambio, aumenta el costo de cómputo y la necesidad de acotar el espacio de búsqueda. La **Tabla 1** resume estas tendencias, destacando mejoras en error de reconstrucción y estabilidad de parámetros frente a *baselines* deterministas, lo que motiva la integración de Prony con algoritmos genéticos y variantes en esta tesis.

Tabla 1: Trabajos relacionados relevantes para esta investigación

Autores (año)	Título	Área / Foco	Método / Enfoque	Métricas de evaluación	Relevancia para esta tesis
Roonizi (2023) [16]	<i>Fourier analysis: A new computing approach</i>	Fourier / Cómputo	Reformulación computacional de la TA/DFT; consideraciones de implementación eficiente	Análisis de complejidad; ejemplos ilustrativos	Aporta criterios prácticos para el cálculo y ajuste de coeficientes y estrategias numéricas en reconstrucción.
Kheirati Roonizi & Sassi (2024) [17]	<i>ECG signal decomposition using Fourier analysis</i>	ECG / Fourier	Fourier con ajuste de coeficientes por ℓ_1 vs. ℓ_2 ; comparación con Butterworth fase-cero; separación QRS/T/P	Error de descomposición (sintéticos); precisión de separación en MIT-BIH; menor overshoot y mejor rechazo a outliers	Propone objetivos robustos (EAM/ ℓ_1) para mitigar Gibbs y separar componentes; referencia directa para el Caso I
Beckermann, Matos & Wielonsky (2007) [18]	<i>Reduction of the Gibbs phenomenon for smooth functions with jumps by the ε-algorithm</i>	Gibbs	Aceleración de convergencia vía ε -algorithm (Wynn); mitigación de sobreimpulso en series truncadas	Reducción de L_∞ cerca del salto; velocidad de convergencia	Alternativa de posprocesado/reesumación para reducir Gibbs sin filtros fuertes; base para comparación.
Thakare <i>et al.</i> (2015) [19]	<i>FIR LP design using Genetic Algorithms</i>	Gibbs/Filtros	GA para coeficientes FIR (fase lineal) minimizando MSE y ripple	MSE, ripple PB/SB; vs. Hamming/Hanning	Metaheurísticas para controlar ondulación/artefactos espectrales.
Plonka & Tasche (2014) [4]	<i>Prony methods for recovery of structured functions</i>	Prony (revisión)	Prony clásico y variantes; relación con ESPRIT/MPM	Errores de reconstrucción/recuperación modal; estabilidad	Base conceptual de Prony y extensiones robustas.
Hua & Sarkar (1990) [2]	<i>Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped/Undamped Sinusoids in Noise</i>	MPM	Lápiz de matrices (Hankel); autovalores generalizados (polos)	Error de frecuencia/amortiguamiento vs. SNR; modos cercanos	Benchmark robusto frente a ruido; comparación directa con Prony+GA.
Sun, Babu & Palomar (2016) [20]	<i>Majorization–Minimization Algorithms in Signal Processing, Communications, and Machine Learning</i>	Optimización (MM)	Esquema MM con funciones sustitutas; descenso monótono; garantías de convergencia	Convergencia a puntos estacionarios; ejemplos con MSE/log-likelihood	Marco para diseñar funciones objetivo y restricciones; guía de criterios y paradas en optimización.
Jiang <i>et al.</i> (2020) [6]	<i>Enhanced GA for Parameter Estimation of Sinusoidal Signals</i>	GA (metaheurística)	Selección sin sesgo; crossover en dos pasos; mutación adaptativa	RMSE de parámetros; generaciones/tiempo; robustez vs. SNR	Guía de diseño para GA-Prony/EGA-Prony (mejoras evolutivas).
Spavieri <i>et al.</i> (2017) [21]	<i>Parameter Estimation of Exponential Signals Using PSO</i>	PSO (metaheurística)	PSO en el espacio modal exponencial (amplitud, frecuencia, decaimiento)	RMSE/MAE; sensibilidad a ruido; convergencia	Referencia PSO análoga al caso Prony.

Abreviaturas: RMSE: raíz del error cuadrático medio; MAE: error absoluto medio; SNR: relación señal-ruido; MSE/ECM: error cuadrático medio.



3. Marco teórico

En esta sección se revisan definiciones y principios necesarios para la reconstrucción de señales. Se introducen y detallan dos marcos de reconstrucción —el análisis de Fourier y el método de Prony— junto con sus herramientas computacionales (DFT/FFT, LS/TLS/MPM) y las métricas de evaluación ECM/EAM/RMSE/SNR. Asimismo se describe el enfoque de *majorization-minimization* (MM) como técnica de optimización clave para funciones objetivo no diferenciables o no convexas, y se resumen los algoritmos bioinspirados (GA, PSO) empleados en la estimación modal.

3.1 Métodos de Reconstrucción de Señales

Los métodos de reconstrucción buscan aproximar una señal desconocida o degradada a partir de información parcial (muestras, coeficientes o parámetros) [22]. En esta tesis se abordan dos familias: (i) reconstrucción espectral (Fourier) y (ii) reconstrucción paramétrica mediante modelos exponenciales (Prony).

3.2 Análisis de Fourier

El análisis de Fourier descompone señales en componentes sinusoidales ortogonales para explicar y manipular su contenido espectral. Esta descomposición es útil porque (i) separa fenómenos por frecuencia, (ii) conduce a operadores lineales simples (filtros) y (iii) conserva energía (Parseval/Plancherel), lo que habilita mediciones comparables.

Serie de Fourier (SF). Para una $f(t)$ periódica de periodo $T = 1/f_0$, la expansión trigonométrica es

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)], \quad (1)$$

con coeficientes por proyección ortogonal sobre la base $\{\cos, \sin\}$:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt. \quad (2)$$

En forma compleja,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt. \quad (3)$$



Bajo condiciones tipo Dirichlet, la SF converge al promedio de los límites laterales en una discontinuidad; la energía se conserva vía Parseval:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \quad (4)$$

Transformada de Fourier (TF). Para señales no periódicas,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5)$$

Convenciones de normalización varían (por ejemplo con $1/\sqrt{2\pi}$); aquí usamos rad/s. Propiedades clave: linealidad, desplazamiento temporal/frecuencial, modulación y el teorema de la convolución, que convierte convolución en producto y viceversa.

Efectos prácticos (medición discreta). Al observar $f(t)$ durante una ventana finita T_{obs} , la TF se estima con una suma finita (DFT, §3.2.1). Esto introduce: (i) *fuga espectral (spectral leakage)* cuando la señal no es *coherente* con la rejilla de frecuencias; (ii) *picket-fence* (muestreo espectral grueso, resolución $\Delta f = 1/T_{\text{obs}}$); (iii) *scalloping loss* (pérdida por desalineación de tono con el centro de un bin). El *enventanado* (Hann, Hamming, Blackman, Kaiser, etc.) controla el compromiso entre ancho de lóbulo principal y nivel de lóbulos laterales; la *ENBW* y la *ganancia coherente* del window calibran sesgo y varianza del estimador espectral. Referencias de síntesis y tablas comparativas de ventanas en [23–25].

3.2.1 Transformada de Fourier Discreta (DFT)

La DFT representa N muestras temporales como N coeficientes de frecuencia igualmente espaciados; es la herramienta computacional para espectros y convoluciones rápidas.

Definición y pares de síntesis/análisis. Para $x[n]$, $n = 0, \dots, N-1$,

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (6)$$

La DFT *muestra* la DTFT en k -bins uniformes y asume periodicidad tanto en tiempo (extensión circular de $x[n]$) como en frecuencia ($X[k]$ periódico de periodo N). Para entradas reales, $X[k]$ tiene simetría conjugada $X[k] = X^*[N-k]$.



Resolución, zero-padding y lineal vs circular. La resolución espectral viene dada por $\Delta f = F_s/N$ (con F_s frecuencia de muestreo). Aumentar N (más muestras) mejora resolución; *zero-padding* solo interpola el espectro (mejor trazo), no aumenta poder resolutivo. La convolución lineal puede implementarse con DFTs evitando aliasado circular mediante *overlap-add/overlap-save*.

Ventanas y métricas. Con ventana $w[n]$, se estima

$$X_w[k] = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] w[n]) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (7)$$

Cada ventana tiene *ancho de lóbulo principal* (resolución) y *nivel de lóbulos laterales* (reyección); la ENBW y la ganancia coherente permiten corregir amplitudes y comparar detectabilidad de tonos [23, 24]. Para tonos aislados, Hann reduce fuga a costa de resolución; Kaiser ajusta suavizado vía parámetro β .

Parseval en DFT y normalizaciones. Con la convención (6),

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2. \quad (8)$$

Otras bibliografías distribuyen el factor $1/\sqrt{N}$ entre análisis/síntesis; mantener consistente la convención evita sesgos al comparar amplitudes [25, 26].

3.2.2 Transformada Rápida de Fourier (FFT)

La FFT no es otra transformada, sino una familia de algoritmos para computar la DFT con costo $O(N \log N)$ (vs. $O(N^2)$), habilitando análisis de alta resolución en tiempo práctico.

Cooley–Tukey y mariposas. Los esquemas de *decimación en el tiempo* (DIT) y *en la frecuencia* (DIF) factorizan N en subproblemas y combinan resultados con factores giratorios $W_N^m = e^{-j2\pi m/N}$. El ordenamiento *bit-reversal* y la reutilización de twiddles permiten aprovechar localidad y SIMD. Cooley–Tukey popularizó el método moderno [12, 27].

Variantes prácticas. *Split-radix* reduce multiplicaciones en potencias de dos, especialmente con datos reales [28]. Para N primo, *Rader* convierte la DFT en una correlación circular; para tamaños



arbitrarios, *Bluestein/CZT* reexpresa la DFT como convolución y usa FFTs auxiliares [29, 30]. Bibliotecas de alto desempeño (p. ej., FFTW3) eligen automáticamente planes rápidos según la arquitectura [31].

Consideraciones numéricas y de ingeniería. El escalado y la cuantización importan (más aún en fijo): distribuir factores $1/N$ evita desbordamientos. El *zero-padding* mejora visualización (no resolución); elegir N con factores pequeños acelera; ventanas adecuadas reducen fuga y *scalloping*; para espectros promedio, usar periodogramas con Welch en lugar de una sola DFT reduce varianza [23, 25].

3.3 Fenómeno de Gibbs

El fenómeno de Gibbs describe el sobreimpulso/subimpulso cerca de discontinuidades cuando se utilizan sumas parciales de Fourier. Aun aumentando N , el sobreimpulso relativo tiende a una constante ($\approx 8.9\%$ del salto) y las oscilaciones se concentran en la vecindad de la discontinuidad [8]. Como se muestra en la **Figura 1**, la suma parcial de 1000 términos exhibe el sobreimpulso característico; la **Figura 2** documenta cómo el porcentaje de sobreimpulso se estabiliza al incrementar el número de términos; y la **Figura 3** ilustra el comportamiento local para $N = 50$, donde las ondulaciones decrecen alrededor del salto.

Mitigación. Existen estrategias de posprocesado que atenúan el sobresalto: reproyección con polinomios de Gegenbauer [1] y variantes de reproyección robusta [32], filtros espectrales; y aceleración de convergencia vía el ε -algorithm de Wynn, con aplicaciones a funciones suaves con saltos [18]. En el Caso I de esta tesis se explora, además, la *optimización directa de coeficientes* minimizando EAM/ECM en la serie truncada.

3.4 Teorema de muestreo y reconstrucción

Si una señal $x(t)$ es *de banda limitada* (su contenido espectral es nulo para $|f| > F_{\max}$, donde F_{\max} es la **frecuencia máxima** presente en el espectro de $x(t)$), entonces puede recuperarse exactamente

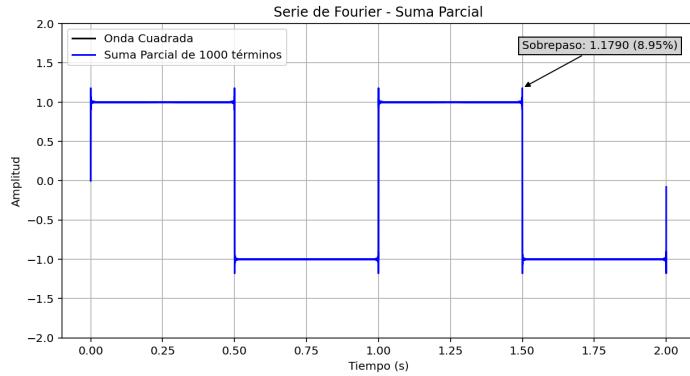


Figura 1: Onda cuadrada y suma parcial con $N = 1000$. Se observan sobreimpulsos/subimpulsos de Gibbs junto a cada salto; las ondulaciones decrecen al alejarse y se concentran cerca de la discontinuidad.

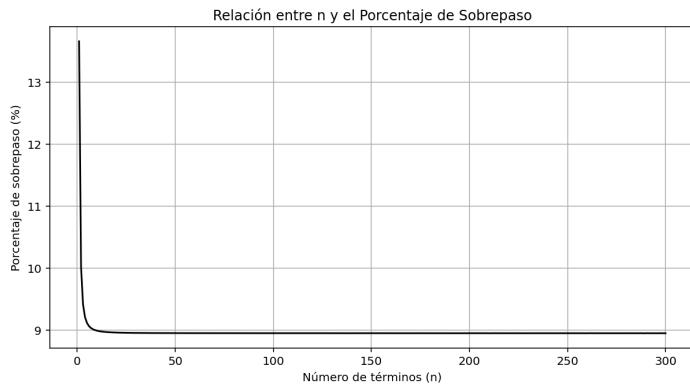


Figura 2: Sobrepasso relativo (%) vs. número de términos N . La curva converge al límite teórico del fenómeno de Gibbs ($\sim 8.9\%$ del salto) y la variación entre valores sucesivos disminuye al crecer N .

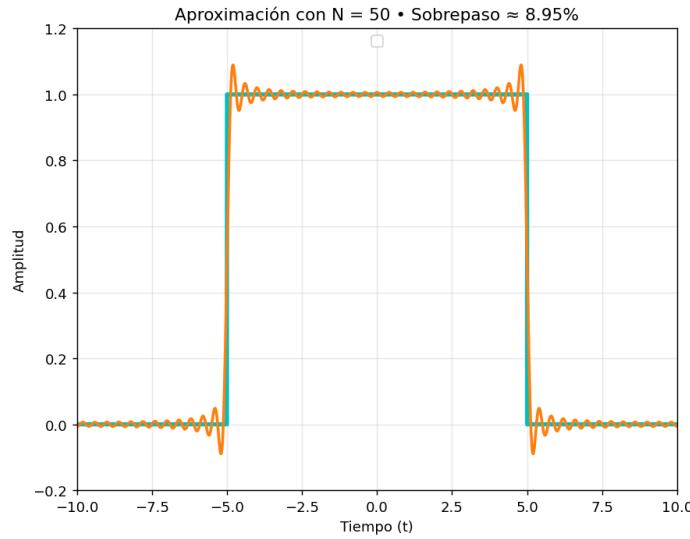


Figura 3: Vista local para $N = 50$ cerca de la discontinuidad. Patrón alternante de sobreimpulso/subimpulso con amplitud decreciente; el espaciamiento entre ondulaciones es mayor que para N grandes ($\sim 1/N$).



a partir de sus muestras uniformes $x[n] = x(nT_s)$ siempre que la frecuencia de muestreo cumpla

$$f_s = \frac{1}{T_s} > 2F_{\max} \quad (\text{condición de Nyquist}),$$

empleando un interpolador ideal. Esta garantía fija el *piso teórico*; el resto del diseño experimental controla cuánto nos alejamos del ideal en escenarios reales [25, 26].

Formulación espectral y aliasing. Muestrear uniformemente equivale a multiplicar $x(t)$ por un tren de impulsos: $x_s(t) = \sum_n x(nT_s) \delta(t - nT_s)$. En frecuencia,

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(j(\Omega - k\Omega_s)), \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}.$$

El espectro se replica cada Ω_s ; si $f_s > 2F_{\max}$, las réplicas no se solapan. Cuando $f_s \leq 2F_{\max}$, aparece *aliasing*: componentes por encima de $F_N = f_s/2$ se pliegan a bajas frecuencias y la información se pierde de forma irrecuperable.

Reconstrucción ideal (interpolación sinc). Bajo $f_s > 2F_{\max}$, un filtro pasa-bajas ideal, LPF por sus siglas en inglés *Low-Pass Filter* con respuesta $H_r(j\Omega) = T_s$ para $|\Omega| < \Omega_s/2$ (y 0 fuera) recupera exactamente:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right), \quad \operatorname{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}.$$

En la práctica, se utiliza un **LPF realizable** (FIR/IIR) con banda de transición y posible ondulación, lo que introduce errores pequeños y retardo (lineal si el FIR es de fase lineal) [26].

Frecuencia de Nyquist y unidades digitales. La *frecuencia de Nyquist* es $F_N = f_s/2$ (equivale a $\omega = \pi$ en frecuencia digital $\omega = \Omega T_s$). Para comparar análisis, conviene normalizar con f/F_s (ciclos/muestra) o $\omega \in [-\pi, \pi]$ (rad/muestra) [25].

Submuestreo pasabanda y procesamiento multitala. Señales estrictamente pasabanda pueden muestrearse por debajo de $2F_{\max}$ si las réplicas no se solapan; requiere elegir cuidadosamente bandas y f_s . Para cambio de tasa L/M , la interpolación/decimación con filtros polifásicos preserva banda y reduce costo [26].

Guía mínima de diseño. (1) Elegir f_s con margen ($f_s \gtrsim 4F_{\text{máx}}$) para tolerar variaciones y simplificar filtros; (2) aplicar un **LPF analógico** previo; (3) usar interpolación *windowed-sinc* o FIR de fase lineal como aproximación al ideal; (4) verificar aliasing y error de reconstrucción con RMSE/SNR en el intervalo de interés.

El esquema completo de muestreo y reconstrucción se ilustra en la Figura 4.

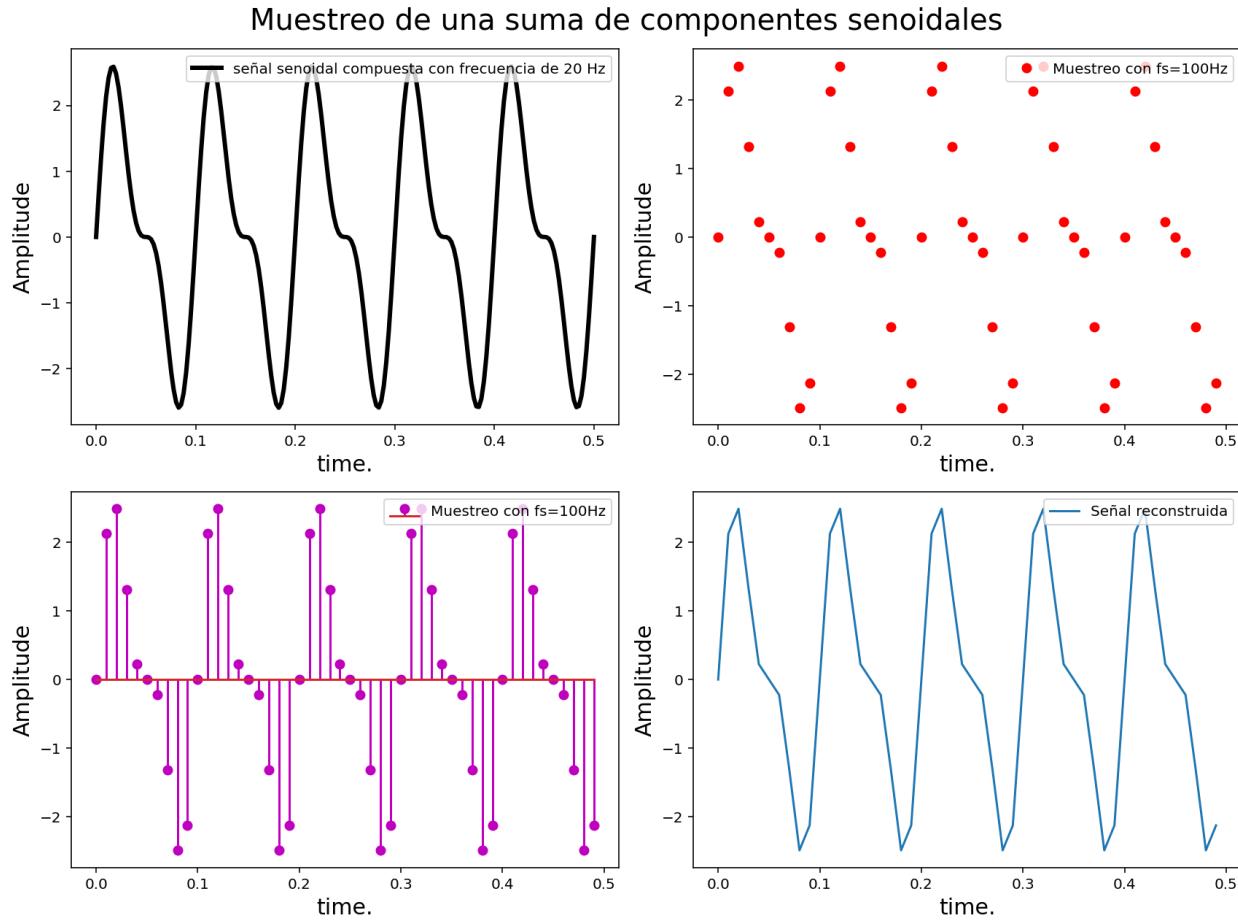


Figura 4: Esquema de muestreo y reconstrucción de una señal con componentes senoidales de banda limitada con $F_{\text{máx}} = 20 \text{ Hz}$ (*máxima frecuencia presente*) y muestreo uniforme $f_s = 100 \text{ Hz}$ ($T_s = 10 \text{ ms}$). Paneles: arriba-izq., señal continua; arriba-der., instantes de muestreo; abajo-izq., secuencia discreta; abajo-der., reconstrucción por interpolación sinc y **LPF** (filtro pasa-bajas) ideal al cumplirse Nyquist ($f_s > 2F_{\text{máx}}$), en $0 \leq t \leq 0.5 \text{ s}$.



3.5 Método de Prony

El método de Prony asume un modelo sumado de exponenciales amortiguadas/no amortiguadas:

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=1}^p A_k e^{\alpha_k(n-1)T_s} \cos(2\pi f_k(n-1)T_s + \theta_k) \\ &= \Re \left\{ \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1} \right\}, \quad h_k = A_k e^{j\theta_k}, z_k = e^{\alpha_k T_s} e^{j2\pi f_k T_s}. \end{aligned} \quad (9)$$

Notación breve: $n = 1, \dots, N$ (índice temporal discreto); p (número de modos); T_s (período de muestreo, $F_s = 1/T_s$); $A_k \geq 0$ (amplitud real); α_k (atenuación por muestra, típicamente ≤ 0 para decaimiento); f_k (frecuencia en Hz, $0 \leq f_k < F_s/2$); θ_k (fase en rad); $\Re\{\cdot\}$ (parte real); h_k (amplitud compleja) y z_k (polo discreto). El objetivo es estimar $\{A_k, \alpha_k, f_k, \theta_k\}_{k=1}^p$ a partir de $x[n]$. A alto nivel, los pasos son: (i) estimación de polos z_k ; (ii) estimación de amplitudes/fases h_k . Una síntesis moderna de estas ideas se encuentra en [4] y una guía computacional biomédica en [13].

3.5.1 Prony polinómico (clásico). Datos sin ruido satisfacen una relación de predicción lineal (filtro anulador)

$$\sum_{i=0}^p a[i] x[n-i] = 0, \quad a[0] = 1. \quad (10)$$

donde $a[1:p]$ son los coeficientes del filtro (vector $a = [a[1], \dots, a[p]]^\top$).

Agrupando N ecuaciones se obtiene un sistema Toeplitz/Hankel

$$Ta = -y, \quad \min_a \|Ta + y\|_2^2, \quad (11)$$

resuelto por LS cuando $N > 2p$. El polinomio característico $\phi(z) = \sum_{i=0}^p a[i] z^{p-i}$ tiene raíces $\{z_k\}$ de donde

$$\alpha_k = \frac{1}{T_s} \ln |z_k|, \quad f_k = \frac{1}{2\pi T_s} \arg(z_k). \quad (12)$$

Fijados los polos, las amplitudes/fases se recuperan ajustando un sistema de Vandermonde

$$Zh \approx x_{1:p}, \quad \hat{h} = Z^+ x_{1:p}, \quad A_k = |\hat{h}_k|. \quad (13)$$

En la práctica, es preferible resolver (11) por QR/SVD para evitar inestabilidades de las ecuaciones normales [13].



3.5.2 Mínimos Cuadrados Totales (TLS). Si el ruido afecta a la matriz y al vector en (11), TLS busca la mínima perturbación conjunta:

$$\min_{\Delta T, \Delta y, a} \|[\Delta T \ \Delta y]\|_F \quad \text{s.a. } (T + \Delta T)a = -(y + \Delta y). \quad (14)$$

donde $\|\cdot\|_F$ es la norma de Frobenius.

Con la SVD aumentada $[T \ y] = U\Sigma V^H$, el último vector de V particionado como $v = [v_{1:p}^\top, v_{p+1}]^\top$ induce la solución

$$\hat{a}_{\text{TLS}} = -\frac{v_{1:p}}{v_{p+1}}, \quad (15)$$

con mejor comportamiento cuando hay perturbaciones en ambas partes [3]. Luego se aplican (12)–(13).

3.5.3 Matrix Pencil Method (MPM). Se construye la matriz de Hankel $Y \in \mathbb{C}^{L \times K}$ con $L + K - 1 = N$ y sus desplazamientos $Y_1 = [x[1:L], \dots, x[K:N-1]]$, $Y_2 = [x[2:L+1], \dots, x[K+1:N]]$. Si $\text{rank}(Y) = p$, entonces

$$Y_2 \approx Y_1 Z, \quad Z = \text{diag}(z_1, \dots, z_p), \quad (16)$$

y los polos se obtienen como autovalores generalizados del lápiz $Y_2 - \lambda Y_1$. Numéricamente, con reducción de rango por SVD ($Y \approx U_s \Sigma_s V_s^H$) se usa

$$\{z_k\} = \text{eig}\left((U_s^H Y_1 V_s \Sigma_s^{-1})^\dagger (U_s^H Y_2 V_s \Sigma_s^{-1})\right), \quad (17)$$

donde † denota la seudoinversa de Moore–Penrose y $\text{eig}(\cdot)$ extrae autovalores.

Posteriormente amplitudes/fases por (13) [2]. MPM suele resolver mejor los modos cercanos y es robusto al ruido.

3.5.4 Orden del modelo y preprocessamiento. Desde la óptica de aproximación de rango bajo estructurado, el *Hankel denoising* busca la mejor aproximación de rango p dentro del conjunto de matrices Hankel asociadas a la señal. Operativamente, las *iteraciones de Cadzow* alternan proyecciones entre (i) el conjunto de matrices Hankel (imponiendo estructura mediante promediado de anti-diagonales) y (ii) el conjunto de matrices de rango $\leq p$ (mediante truncamiento SVD), convergiendo a una señal *con ruido atenuado* cuya trayectoria (Hankel) es aproximadamente de bajo



rango [33, 34].

Cuando el SVD es inestable (datos muy ruidosos o Hankel mal condicionado), sustituir el truncamiento duro por un *SVD con regularización de Tikhonov* (encogimiento “ridge” de los valores singulares) reduce el sobreajuste numérico; el parámetro λ puede elegirse con criterios como la *L-curve* o el principio de discrepancia [35]. Esto preserva la proyección Hankel en (i) y amortigua la proyección de rango en (ii), mejorando la separación señal/ruido previa a LS/TLS/MPM, junto con la elección adecuada de p , de la ventana L y de criterios de paro [13].

3.6 Métricas de evaluación del error

Para cuantificar reconstrucción se usan:

$$\text{ECM} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y[n] - \hat{y}[n])^2, \quad (18)$$

$$\text{EAM} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |y[n] - \hat{y}[n]|, \quad (19)$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y[n] - \hat{y}[n])^2}, \quad (20)$$

$$\text{SNR}_{\text{out}} = 10 \log_{10} \left(\frac{\frac{1}{N} \sum_n y[n]^2}{\frac{1}{N} \sum_n (y[n] - \hat{y}[n])^2} \right). \quad (21)$$

En el Caso I (Gibbs) también se reporta el *sobreceso relativo (%)* respecto a la magnitud del salto.

En el Caso II (Prony), RMSE y SNR_{out} son las métricas principales.

3.7 Esquema de mayorización–minimización (MM)

En esta tesis se adoptó el enfoque de *mayorización–minimización* (MM) como mecanismo genérico para resolver problemas de optimización que, en su forma original, resultan difíciles de atacar de manera directa ya sea por su no convexidad, por la presencia de términos no suaves o porque la función de costo no admite una solución cerrada [20, 36]. La idea central de MM es trabajar sobre una sucesión de problemas auxiliares, cada uno de ellos más sencillo que el problema original pero construido de manera que guíe la solución hacia un punto estacionario del problema real [37].



El procedimiento se puede describir de la siguiente manera. Supóngase que se quiere minimizar una función $f(x)$ sobre un conjunto admisible X . En lugar de minimizar f de forma directa, en la iteración t se construye una función sustituta

$$g(x \mid x^{(t)})$$

que cumple dos requisitos clave: (i) es más fácil de minimizar que f y (ii) en el punto actual $x^{(t)}$ ambas funciones coinciden. Además, la función sustituta se elige de forma que

$$g(x \mid x^{(t)}) \geq f(x), \quad \forall x \in X,$$

es decir, que sea una *mayorante* global (si el problema fuera de maximización, se usaría una menorante). Una vez definida $g(\cdot \mid x^{(t)})$, se resuelve el subproblema sencillo

$$x^{(t+1)} \in \arg \min_{x \in X} g(x \mid x^{(t)}).$$

Como en $x^{(t)}$ las dos funciones coinciden y en el resto del dominio g domina a f , se garantiza que

$$f(x^{(t+1)}) \leq f(x^{(t)}),$$

por lo que la secuencia de costos es monótonamente no creciente. Bajo supuestos estándar (acotación de subniveles, continuidad y una construcción coherente de la sustituta) la sucesión $\{x^{(t)}\}$ converge a un punto estacionario [20].

Esquema básico de MM.

1. **Paso de construcción.** Dado el punto actual $x^{(t)}$, construir una función sustituta $g(\cdot \mid x^{(t)})$ que mayorice a f en todo el dominio y que satisfaga $g(x^{(t)} \mid x^{(t)}) = f(x^{(t)})$.
2. **Paso de minimización.** Resolver el subproblema auxiliar y actualizar

$$x^{(t+1)} \in \arg \min_{x \in X} g(x \mid x^{(t)}).$$

Estos dos pasos se repiten hasta que la diferencia relativa entre iteraciones sea suficientemente pequeña o se alcance un número máximo de iteraciones.



Construcción de la función sustituta. La calidad del algoritmo MM depende casi por completo de cómo se elige g . En esta tesis se consideraron las siguientes estrategias prácticas (todas ellas válidas para problemas con términos de regularización o con penalizaciones no convexas), en línea con [20, 36, 38, 39]:

- **Linealización de la parte complicada.** Si la función objetivo puede separarse como $f = f_0 + f_{\text{dif}}$, donde f_{dif} es la parte difícil (por ejemplo, cóncava o no suave), entonces en la iteración t se sustituye $f_{\text{dif}}(x)$ por su expansión de primer orden alrededor de $x^{(t)}$:

$$f_{\text{dif}}(x) \leq f_{\text{dif}}(x^{(t)}) + \nabla f_{\text{dif}}(x^{(t)})^\top (x - x^{(t)}),$$

dando lugar a una mayorante fácilmente minimizable. Esta misma idea conduce de forma natural a los esquemas tipo IRLS cuando la penalización es de la forma $|x|^p$, $0 < p \leq 1$.

- **Acotaciones cuadráticas globales.** Cuando el gradiente de f es Lipschitz con constante L , se puede usar la cota de descenso

$$f(x) \leq f(y) + \nabla f(y)^\top (x - y) + \frac{L}{2} \|x - y\|^2,$$

que produce sustitutas cuadráticas y permite obtener actualizaciones en forma cerrada o por lo menos resolubles de manera muy eficiente [40].

- **Desigualdades clásicas.** Herramientas como Jensen, Cauchy–Schwarz o AGM permiten construir mayorantes para productos o razones que suelen aparecer en problemas de estimación con ruido o con datos truncados; con ellas se simplifica la forma funcional del subproblema de cada iteración.

El criterio para elegir una u otra técnica fue siempre el mismo: la sustituta debía ser lo bastante fiel para no frenar el descenso, pero lo bastante simple para resolverse muchas veces dentro del ciclo general.

Plantilla de implementación.

Entrada: $x(0)$, tolerancia epsilon, número máximo de iteraciones T
para $t = 0, 1, \dots, T-1$ hacer



```
construir g(· | x(t))
x(t+1) ← argmin_x g(x | x(t))
si criterio de paro satisfecho entonces salir
fin para
Salida: x(t+1)
```

Aceleración. Un MM puro suele ser muy estable pero no siempre rápido. Por esa razón se permiten extensiones como:

- *Sobre-relajación* o búsqueda en línea sobre la dirección $d^{(t)} = x^{(t+1)} - x^{(t)}$ siempre que no se rompa la propiedad de descenso.
- *Extrapolación tipo SQUAREM o Aitken*, que aproxima el punto fijo del operador de actualización [41].
- *Correcciones tipo quasi–Newton* aplicadas no al problema original sino al mapeo de MM, lo que acelera la fase final de convergencia.

En todos los casos se conservó la factibilidad proyectando de nuevo al conjunto admisible cuando fue necesario.

Relación con otros métodos. Es importante mencionar que EM puede verse como un caso particular de MM (la cota se construye con Jensen y después se maximiza) [42], y que otros marcos modernos como los métodos proximales [38] o los procedimientos convex–concave (CCP/CCCP) [39] pueden interpretarse con la misma lógica de “reemplazar por un problema más sencillo y garantizar descenso”. Esta equivalencia es útil porque permite reutilizar resultados de convergencia ya establecidos para MM.

3.8 Algoritmos bioinspirados: GA, EGA y PSO

Para estimar parámetros de señales sinusoidales (y exponencialmente amortiguadas), las funciones de costo son *multimodales*, con correlaciones fuertes entre parámetros (p. ej., A_k y α_k) y múltiples óptimos locales. Los algoritmos bioinspirados (GA/EGA/PSO) son atractivos porque exploran sin gradientes, toleran ruido y permiten acotar físicamente el espacio de búsqueda.



Modelo y vector de decisión. Usamos codificación real sobre

$$\Theta = [A_{1:p}, \alpha_{1:p}, f_{1:p}, \theta_{1:p}],$$

con restricciones típicas: $A_k \geq 0$, $\alpha_k \geq 0$, $f_{\min} \leq f_k \leq f_{\max}$ y ordenamiento $f_1 \leq \dots \leq f_p$ (evita permutaciones equivalentes). La función objetivo puede ser EAM/ECM temporal (RMSE de *waveform*) y, si conviene, un término de regularización suave (p. ej. penalizar frecuencias demasiado juntas). Recomendamos normalizar tiempo y amplitud para mejorar la condición numérica.

3.8.1 Algoritmos Genéticos (GA) de codificación real

Propósito. Los GA exploran con operadores de selección, cruce y mutación, manteniendo diversidad y convergiendo por presión selectiva [5, 43].

Selección. Torneo (tamaño 2–3) es robusto y fácil de paralelizar; ruleta/SUS reducen sesgo pero dependen del escalado de fitness [5, 44]. Usa *elitismo* (1–2 individuos) para preservar el mejor.

Cruce (recombinación). Para variables continuas, dos opciones estándar:

- **SBX** (Simulated Binary Crossover): genera descendencia alrededor de los padres con control de dispersión mediante η_c (típico 10–20); buena para afinado local [45].
- **BLX- α** : toma muestras en el intervalo extendido $[\min - \alpha\Delta, \max + \alpha\Delta]$ (típico $\alpha \in [0.2, 0.5]$); útil para ampliar exploración [46].

Mutación. Gaussiana (varianza ligada al rango de cada gen) o *polinómica* (análoga a SBX con parámetro η_m) mantienen diversidad cuando el cruce se “estanca” [43]. Una tasa p_m pequeña (1–5 %) suele ser suficiente; puedes aumentarla ligeramente si no hay mejora en K iteraciones.

Manejo de restricciones. Recomendamos **reglas de factibilidad de Deb** (comparar primero factibilidad, luego suma de violaciones, y por último fitness) para respetar cotas y el ordenamiento de frecuencias sin ajustar penalizaciones a mano [47]. Alternativamente, reparametriza: $f_k = f_{\min} + \sigma(\tilde{f}_k)(f_{\max} - f_{\min})$ y ordena f tras cada operador.



Niching y simetrías. Para evitar converger a permutaciones equivalentes, *canaliza* el cromosoma (ordena por f_k) y, si hay competencia entre modos cercanos, usa *niching* ligero (compartición de fitness) o reinicios parciales.

Hiperparámetros guía. Tamaño de población $M=30\text{--}100$ (según dimensión), $p_c=0.7\text{--}0.9$, $p_m=0.01\text{--}0.05$, 1–2 élitres. Mezcla de SBX (explotación) y BLX- α (exploración) acelera el arranque.

3.8.2 Enhanced Genetic Algorithm (EGA)

El EGA agrupa genes por *modo* $g_k = (A_k, \alpha_k, f_k, \theta_k)$ y opera sobre *fragmentos modales* coherentes, combinándolo con selección *sin prejuicio*, cruce en dos etapas y mutación adaptativa. En sinusoidales ruidosas, EGA supera GA/PSO en precisión y velocidad [6].

Mecánica del EGA (resumen).

1. **Selección sin prejuicio:** divide la población en dos grupos (benigno/maligno) por fitness; el primero cruza, el segundo *muta* más (conserva diversidad) y hay *migración* bidireccional iterativa.
2. **Two-Step Crossover (TSC):** (i) elige subconjuntos de *modos* con prob. P_{c1} ; (ii) dentro de cada modo, aplica cruce (p. ej. SBX/BLX) con prob. P_{c2} . Aumenta drásticamente variables actualizadas por iteración frente a un cruce simple.
3. **Mutación adaptativa:** p_m sigue una logística (baja–alta–baja) a lo largo de las iteraciones para escapar de óptimos locales en la mitad del entrenamiento.
4. **Búsqueda local alrededor del mejor:** inyecta unos pocos individuos en la vecindad del mejor de la generación.

Consejos de implementación.

- **Agrupación modal:** define el cromosoma como concatenación de g_k y ordena por f_k tras cada operador.



- **Parámetros sugeridos:** $M=60\text{--}100$; $P_{c1}=0.6\text{--}0.8$; $P_{c2}=0.6\text{--}0.8$; mutación adaptativa $p_m \in [0.02, 0.25]$ con máximo a mitad del entrenamiento; élite=2.
- **Refinado final:** ejecutar 10–30 iteraciones de LS (Nelder–Mead o Levenberg–Marquardt) sobre el mejor para pulir amplitudes y fases.

3.8.3 Particle Swarm Optimization (PSO)

El algoritmo PSO modela una población de partículas que *vuelan* por el espacio de búsqueda, guiadas por su mejor experiencia y la del grupo:

$$\mathbf{v}_i^{t+1} = \omega \mathbf{v}_i^t + c_1 r_1 (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_i^t) + c_2 r_2 (\mathbf{g} - \mathbf{x}_i^t), \quad \mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i^t + \mathbf{v}_i^{t+1},$$

con ω (inerzia), c_1, c_2 (pesos cognitivo/social) y $r_1, r_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$ [14, 48].

Estabilidad y parámetros.

- **Inercia decreciente:** ω lineal de 0.9 a 0.4 acelera al inicio y estabiliza al final [49].
- **Factor de restricción:** con $\varphi = c_1 + c_2 > 4$, usar $\chi = \frac{2\kappa}{|2-\varphi-\sqrt{\varphi^2-4\varphi}|}$ (típico $\kappa=1$, $c_1 = c_2 = 2.05 \Rightarrow \chi \approx 0.729$) [50, 51].
- **Topología:** *lbest* (anillo) mejora exploración en problemas muy multimodales.
- **Clamping/reflejo:** limita \mathbf{v} a una fracción de los rangos y refleja posiciones fuera de cota para evitar estancamiento en bordes.

Buenas prácticas en nuestro dominio. Inicializa con *Latin Hypercube* para cubrir frecuencias; reparametriza f_k y ordena tras cada actualización; añade *jitter* leve cuando la diversidad cae. PSO ha mostrado buen desempeño en estimación de parámetros bajo armónicos/ruido [21].

3.8.4 ¿Cuándo usar GA/EGA/PSO en esta tesis?

- **Señales con modos bien separados y presupuesto de evaluación moderado:** PSO (con restricción) converge rápido a buenas soluciones; remata con LS local.



- **Señales ruidosas y modos cercanos/permutables:** EGA (agrupación modal + TSC + mutación adaptativa) mantiene diversidad y evita intercambiar “trozos” incoherentes entre modos [6].
- **Exploración amplia + ajuste fino:** GA híbrido (BLX- α para explorar, SBX para afinar) + reglas de Deb para restricciones [45–47].

Sugerencia concreta (nuestros experimentos).

1. **Arranque (30–40 % del presupuesto):** EGA con $M = 80$, $P_{c1} = 0.7$, $P_{c2} = 0.7$, mutación adaptativa pico en la mitad, élite 2.
2. **Intensificación (40–60 %):** reduce p_m y alterna TSC con SBX ($\eta_c = 15$); si no mejora en 10 iteraciones, reinicia 10–15 % de la población alrededor del mejor.
3. **Pulido (último 10–20 %):** LS (Nelder–Mead/LM) sobre el mejor cromosoma/partícula, manteniendo las cotas.



4. Metodología

Esta investigación presenta una metodología experimental cuantitativa, de modo que se diseñaron y ejecutaron experimentos para explorar combinaciones de hiperparámetros y configurar algoritmos bioinspirados empleados como metaheurísticas en tareas de reconstrucción de señales.

Consideramos dos algoritmos ampliamente reportados en la literatura: los *Algoritmos Genéticos* (GA) y la *Optimización por Enjambre de Partículas* (PSO).

Para el Caso de estudio 1; Reducción del fenómeno de Gibbs en series de Fourier truncadas, se emplean GA y PSO, integrados con un ajuste robusto inicial en norma ℓ_1 y regularización tipo Tikhonov, con el objetivo de minimizar el sobreimpulso/subimpulso alrededor de las discontinuidades sin degradar el error global. La evaluación se realiza sobre señales simuladas con saltos abruptos.

En el Caso de estudio 2; optimización de la reconstrucción paramétrica mediante el método de Prony asistido por algoritmos genéticos (GA), se desarrollan dos variantes basadas en GA: (i) GA estándar y (ii) un GA mejorado (EGA) con operadores evolutivos y mecanismos de diversidad poblacional. Los métodos se validan primero en señales simuladas con parámetros comparables a señales reales de EEG y, posteriormente, en registros reales de potenciales evocados visuales (VEPCON) [52].

Todos los experimentos siguen protocolos reproducibles (semillas fijadas, registro de versiones y de hiperparámetros) y se evalúan con métricas globales y locales apropiadas para cada caso (p. ej., MAE/RMSE, SNR_{out}, y sobreimpulso/subimpulso en vecindades de discontinuidad). Para el caso del método Prony, se reportan además intervalos de confianza y coeficientes de variación para cuantificar la estabilidad de los estimadores. El detalle operativo de cada *pipeline*, los rangos de hiperparámetros y las definiciones de métricas se desarrollan en las subsecciones correspondientes.



4.1 Revisión bibliográfica y análisis del estado del arte

Se llevó a cabo una revisión exhaustiva de la literatura para comprender con claridad cómo se abordan actualmente los problemas de reconstrucción de señales y, en particular, qué ocurre con las expansiones truncadas (series de Fourier) cerca de discontinuidades, donde aparece el sobreimpulso/subimpulso (fenómeno de Gibbs). Asimismo, fueron revisadas las métricas más utilizadas (ECM/MSE y EAM/MAE), los enfoques robustos tipo MM/IRLS, las regularizaciones de Tikhonov y el empleo de metaheurísticas (GA, PSO) para el ajuste de coeficientes y parámetros.

Finalmente, para reforzar la parte práctica, se cursó una materia de posgrado orientada a algoritmos genéticos y se completó una revisión enfocada en implementaciones reproducibles. Con ello, quedaron definidos los *pipelines* experimentales, las métricas y los rangos de hiperparámetros que se detallan en las subsecciones posteriores.

4.2 Desarrollo del método

Con base en la revisión del estado del arte, se definieron dos líneas de trabajo complementarias conforme a los casos de estudio. Para el **Caso 1** (reducción del fenómeno de Gibbs en series de Fourier truncadas), se empleó una estimación robusta inicial en norma ℓ_1 mediante MM/IRLS y, posteriormente, se refinó con Algoritmos Genéticos (GA) bajo un costo multiobjetivo; de manera alternativa, se diseñó un esquema con PSO que optimiza directamente un ECM ponderado en vecindades de las discontinuidades, sin utilizar MM. Para el **Caso 2** (optimización del método de Prony), se implementaron y compararon dos variantes basadas en GA (estándar y mejorada, EGA) orientadas a la búsqueda global de parámetros modales.

En ambos casos, el desarrollo metodológico se estructuró en etapas de modelado, planteamiento del objetivo de optimización, configuración del algoritmo y evaluación con métricas globales y locales. Los detalles operativos, rangos de hiperparámetros, criterios de paro y diagramas de flujo se presentan en las subsecciones correspondientes.



Caso 1: Reducción del fenómeno de Gibbs con MAE (ℓ_1) + MM/IRLS y refinamiento por Algoritmo Genético

Partimos de una expansión de Fourier *truncada* para reconstruir señales con posibles discontinuidades (p. ej., onda rectangular). En lugar del ajuste clásico en MSE (ℓ_2), primero estimamos los coeficientes complejos con un ajuste robusto ℓ_1 (MAE) resuelto por *Majorization–Minimization* (IRLS), lo que reduce el sobre/subimpulso de Gibbs respecto al enfoque ℓ_2 . Posteriormente, refinamos esos coeficientes con un **Algoritmo Genético** (GA) que optimiza un costo multi-objetivo: error global (MAE), penalización explícita de *sobreimpulso*, y regularizaciones ℓ_2 /Tikhonov ponderadas por frecuencia. Esta secuencia MM → GA reemplaza versiones preliminares basadas en descenso del gradiente y se mantiene estable incluso con muchos modos gracias a límites duros de magnitud, región de confianza y *early stopping*. El flujo del Caso 1 se resume en la Figura 5.

Datos y lectura

Para reproducir la visualización de ~ 10 s empleamos $N=1024$ muestras y paso temporal $T_s \approx 0.0098$ s (eje $t[n]=n T_s$). La reconstrucción se hace en una base exponencial compleja truncada:

$$Z_{n,k} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, \dots, N-1, k \in \mathcal{K},$$

donde \mathcal{K} es el conjunto finito de índices armónicos simétrico alrededor de DC:

$$\mathcal{K} = \{-k_{\max}, -k_{\max}+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, k_{\max}\}$$

Su cardinalidad es $|\mathcal{K}| = 2k_{\max} + 1$. Para enlazar con la notación usada en las figuras/tablas, definimos

$$M \triangleq 2k_{\max} \Rightarrow |\mathcal{K}| = M + 1.$$

Así, por ejemplo, si $k_{\max} = 64$ entonces $M = 128$ y se usan $M+1 = 129$ términos (de -64 a $+64$). En algunos apartados nos referimos a un “caso principal” con $M_{\text{main}} = 128$ (esto es, $k_{\max} = 64$).

Observaciones de notación.

- Si la señal $x[n]$ es real, los coeficientes complejos cumplen simetría conjugada $c_{-k} = c_k^*$. Puede parametrizarse la mitad positiva (coseno/seno) de forma equivalente.



- El índice $k = 0$ corresponde al **término DC**. Si N es par y trabajas con DFT estricta, el armónico de **Nyquist** ($k = N/2$) no se incluye aquí porque usamos un truncado controlado por $k_{\max} \ll N/2$.
- La forma real que graficamos es $\hat{x}[n] = \Re\{(Zc)[n]\}$, con $c = \{c_k\}_{k \in \mathcal{K}}$.

Modelo y notación

Sea $x[n]$ la señal y $Z \in \mathbb{C}^{N \times |\mathcal{K}|}$ la matriz de diseño

$$Z_{n,k} = e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad \hat{x}[n] = \Re\{(Zc)[n]\}, \quad c \in \mathbb{C}^{|\mathcal{K}|}.$$

En la práctica usamos $\hat{x} = \Re\{Zc\}$ o Zc según convenga, dado que el costo se formula en términos de $|x - \hat{x}|$.

Estimación robusta inicial (ℓ_1 por MM/IRLS)

Resolvemos

$$\min_c \|x - Zc\|_1 = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - (Zc)_n|.$$

IRLS implementa MM con pesos $W = \text{diag}(1/(|r| + \varepsilon))$, resolviendo en cada iteración el problema normal

$$(Z^H W Z) c = Z^H W x.$$

Usamos inicialización ℓ_2 , $\varepsilon > 0$ pequeño y $\sim 30 - 40$ iteraciones.

Refinamiento por GA: costo multi-objetivo

Definimos el costo

$$\mathcal{J}(c) = w_{\text{MAE}} \text{MAE}(x, \Re\{Zc\}) + w_{\text{ov}} \frac{\text{Ov}(\hat{x})}{100} + w_{L2} \|c\|_2^2 + w_{\text{tikh}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \left(\frac{|k|}{k_{\max}} \right)^2 |c_k|^2,$$

con $\text{Ov}(\hat{x})$ el % de sobreimpulso/subimpulso. Se emplean: (i) **sembrado híbrido** (copia perturbadas de c_{ℓ_1} + aleatorios acotados), (ii) **límites duros** $|c_k| \leq \alpha \max_j |c_{\ell_1,j}|$ ($\alpha \approx 2.0$), (iii) **región de confianza** (tirón leve hacia c_{ℓ_1} tras cruce/mutación), y (iv) **early stopping**.



Cálculo de sobreimpulso. Para onda unitaria, definimos

$$\text{Ov}(\hat{x}) = 100 \cdot \max \left\{ \max_{n < N/2} (\hat{x}[n] - 1), \max_{n \geq N/2} (0 - \hat{x}[n]) \right\},$$

o de forma localizada en ventanas alrededor de discontinuidades $[t_j-w, t_j+w]$ cuando se conocen los saltos.

Métricas

Reportamos métricas globales sobre el registro completo:

$$\text{MAE}, \quad \text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_n (x[n] - \hat{x}[n])^2}, \quad \text{MaxAbs} = \max_n |x[n] - \hat{x}[n]|, \quad \text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{\frac{1}{N} \sum_n x[n]^2}{\frac{1}{N} \sum_n (x[n] - \hat{x}[n])^2},$$

y Ov (%). Adicionalmente, calculamos las versiones locales en una ventana centrada en la discontinuidad.

Protocolo e hiperparámetros (valores típicos)

Semilla fija para reproducibilidad; población 120, élite 30, 500 generaciones máx., cruce de un punto, mutación gaussiana con decaimiento $\gamma = 0.987$, $\text{mut_rate} = 0.12$, $\text{mut_scale} = 0.08$, $\text{patience} = 100$, $\text{min_delta} = 10^{-7}$. Pesos del costo: $w_{\text{MAE}} = 1.0$, $w_{\text{ov}} = 0.75$, $w_{L2} = 5 \times 10^{-5}$, $w_{\text{tikh}} = 8 \times 10^{-4}$. Límite de magnitud: $\text{bound_scale} = 2.0$ relativo a $\|c_{\ell_1}\|_\infty$.

Notas sobre ℓ_1 vs. ℓ_2

El ajuste ℓ_1 (MAE) vía MM/IRLS reduce el sobreimpulso/subimpulso frente a ℓ_2 en series truncadas cuando hay saltos, como se reporta en la literatura y se observa en nuestras corridas.



Algorithm 1 IRLS para ajuste ℓ_1 de Fourier truncado (estimación inicial robusta)

Require: Matriz Z , señal x , iteraciones T , $\varepsilon > 0$

- 1: $c^{(0)} \leftarrow \arg \min_c \|x - Zc\|_2^2$ ▷ inicialización ℓ_2
 - 2: **for** $t = 0$ **to** $T - 1$ **do**
 - 3: $r^{(t)} \leftarrow x - Zc^{(t)}$
 - 4: $W^{(t)} \leftarrow \text{diag}(1/(|r^{(t)}| + \varepsilon))$
 - 5: Resolver $(Z^H W^{(t)} Z) c^{(t+1)} = Z^H W^{(t)} x$
 - 6: **end for**
 - 7: **return** $c_{\ell_1} \leftarrow c^{(T)}$
-

Implementación análoga en el script: función `l1_mm()`.

Algorithm 2 GA híbrido multi-objetivo con salvaguardas (refinamiento de c_{ℓ_1})

Require: Z, x, \mathcal{K} ; pesos $w_{\text{MAE}}, w_{\text{ov}}, w_{L2}, w_{\text{tikh}}$; pop , parents , mut_rate , mut_scale , mut_decay , patience

- 1: Codificar cromosoma real intercalando Re/Im de c
 - 2: Población inicial: S copias ruidosas de c_{ℓ_1} + aleatorios acotados
 - 3: **for** generación $g = 1, 2, \dots$ **do**
 - 4: Evaluar $\mathcal{J}(c)$ y aptitud $f = -\mathcal{J}(c)$
 - 5: Selección elitista (parents); cruce 1-punto; mutación gaussiana $\sigma_g = \text{mut_scale} \cdot \text{mut_decay}^g$
 - 6: **Clamping** $|c_k| \leq \alpha \max_j |c_{\ell_1,j}|$; **pull-back** suave: $c \leftarrow 0.9c + 0.1c_{\ell_1}$
 - 7: **if** no mejora $> \text{min_delta}$ por patience generaciones **then break**
 - 8: **end if**
 - 9: **end for**
 - 10: **return** c_{GA} (mejor encontrado)
-

Los parámetros por defecto y los pesos utilizados se muestran arriba. Implementación: `ga_refine_multiobjective()`.

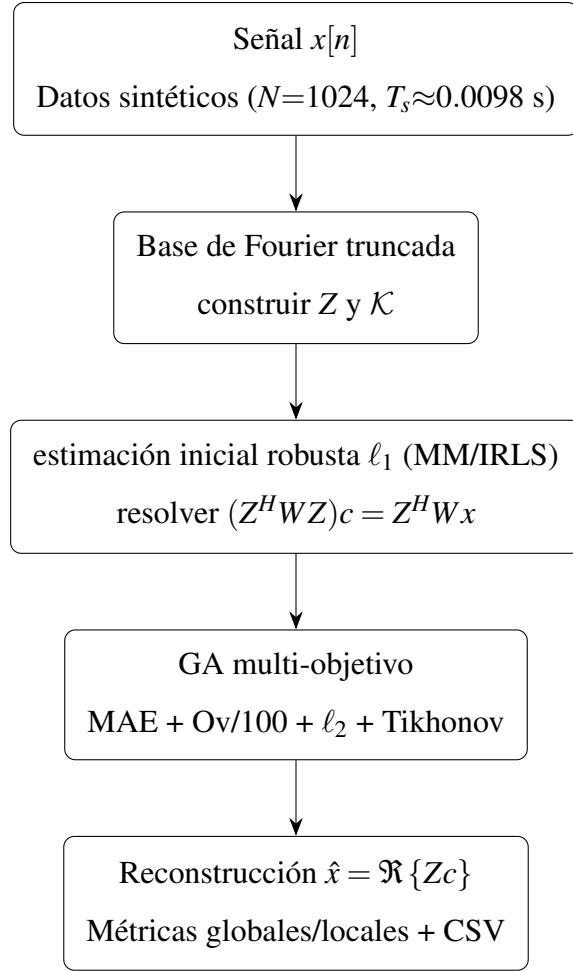


Figura 5: Pipeline experimental del Caso 1.

Observaciones. La solución ℓ_1 reduce el sobreimpulso frente a ℓ_2 ; el GA, al optimizar MAE+Ov con regularización espectral y límites, disminuye adicionalmente el sobreimpulso sin degradar el error global, estabilizando el ajuste con muchos modos.

Caso 1: Reducción del fenómeno de Gibbs con PSO (ECM ponderado, sin MM)

En esta variante se prescinde de MM/IRLS y se optimiza directamente un **error cuadrático medio ponderado** (ECM) en el dominio temporal para reducir el sobreimpulso/subimpulso en vecindades de las discontinuidades, manteniendo la calidad de reconstrucción global. El período se normaliza a $[0, 1]$ y se utiliza una rejilla temporal densa (p. ej., 10^4 muestras) para evaluar con precisión la



función objetivo y el vecino de salto. La Figura 6 muestra el diagrama de flujo de la variante basada en PSO.

Representación de la solución. Cada partícula codifica un vector real con los coeficientes de la serie truncada:

$$\mathbf{z} = [a_1, \dots, a_{N_F} \mid b_1, \dots, b_{N_F}] \in \mathbb{R}^{2N_F},$$

donde N_F es el número de términos de Fourier. La reconstrucción aproximada se obtiene como

$$\hat{s}(t; \mathbf{z}) = \sum_{n=1}^{N_F} (a_n \cos(2\pi n t) + b_n \sin(2\pi n t)), \quad t \in [0, 1].$$

Como señal objetivo se usa una onda cuadrada unitaria $s(t) = \text{sign}(\sin 2\pi t)$ con saltos en $t \in \{0, 0.5\}$.

Objetivo ponderado en discontinuidad. Se define un peso $w[t]$ que amplifica el error en pequeñas ventanas alrededor de los saltos:

$$\text{MSE}_w(\mathbf{z}) = \frac{1}{T} \sum_t w[t] (\hat{s}(t; \mathbf{z}) - s(t))^2, \quad w[t] = \begin{cases} \omega > 1, & t \in \mathcal{N}_\Delta(0) \cup \mathcal{N}_\Delta(0.5), \\ 1, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\mathcal{N}_\Delta(\tau)$ denota una vecindad de ancho 2Δ centrada en τ (típicamente $\Delta = 0.05$, $\omega = 10$). Con ello se “empuja” la optimización a reducir picos locales sin necesidad de un término explícito de sobreimpulso en el costo.

Inicialización y límites. La población inicial se genera alrededor de los coeficientes analíticos de la onda cuadrada (base seno impar): $a_n = 0$ y $b_n = \frac{4}{n\pi}$ si n es impar, $b_n = 0$ si n es par. Se añade perturbación uniforme pequeña (± 0.1) por coeficiente. Para estabilidad numérica se aplican cotas:

$$\mathbf{z} \in [-2, 2]^{2N_F}, \quad \dot{\mathbf{z}} \in [-0.1, 0.1]^{2N_F},$$

donde $\dot{\mathbf{z}}$ es la velocidad de cada partícula (acotamiento tipo *clamping*).

Dinámica de PSO y parámetros. Se utiliza PSO estándar (espacio continuo) con inercia y componentes cognitiva y social:

$$\dot{\mathbf{z}} \leftarrow w \dot{\mathbf{z}} + c_1 \mathbf{r}_1 \odot (\mathbf{p}_{\text{best}} - \mathbf{z}) + c_2 \mathbf{r}_2 \odot (\mathbf{g}_{\text{best}} - \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \leftarrow \mathbf{z} + \dot{\mathbf{z}},$$



con $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Valores típicos: `swarm_size = 400`, $w = 0.6$, $c_1 = c_2 = 1.5$, `max_iter = 100`. La mejor posición personal \mathbf{p}_{best} y la global \mathbf{g}_{best} se actualizan al mejorar MSE_w .

Criterios de paro. Se detiene por iteraciones máximas o al estancarse la mejora de MSE_w (opcional). Al finalizar, \mathbf{g}_{best} produce \hat{s}_{PSO} .

Métricas de evaluación. Además de MSE_w se reportan RMSE global y el **porcentaje de sobreoscilación** en ventanas cortas ($\pm \delta_t$) alrededor de $t = 0$ y $t = 0.5$:

$$\text{Ov}(\%) = 100 \times \frac{1}{2} \left(\max_{t \in \mathcal{N}_{\delta_t}(0)} [\hat{s}(t) - 1]_+ + \max_{t \in \mathcal{N}_{\delta_t}(0.5)} [-1 - \hat{s}(t)]_+ \right),$$

con $[\cdot]_+ = \max(\cdot, 0)$ y δ_t pequeño (p. ej., 0.005).

Algorithm 3 PSO para reducción de Gibbs con ECM ponderado (sin MM)

Require: N_F , rejilla $t \in [0, 1]$, pesos $w[t]$, `swarm_size`, $w, c_1, c_2, \text{max_iter}$

- 1: Definir $s(t) = \text{sign}(\sin 2\pi t)$
 - 2: Construir $\mathbf{z}_{\text{ref}} = [\mathbf{0} \mid b_n^{\text{sq}}]$ con $b_n^{\text{sq}} = \frac{4}{n\pi}$ si n impar, 0 en otro caso
 - 3: Inicializar cada partícula con $\mathbf{z} \sim \mathbf{z}_{\text{ref}} + \mathcal{U}(-0.1, 0.1)^{2N_F}$ y $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$
 - 4: Evaluar $\text{MSE}_w(\mathbf{z})$ y fijar $\mathbf{p}_{\text{best}} = \mathbf{z}$; seleccionar \mathbf{g}_{best}
 - 5: **for** $\ell = 1$ **to** `max_iter` **do**
 - 6: **for** cada partícula **do**
 - 7: $\dot{\mathbf{z}} \leftarrow w\dot{\mathbf{z}} + c_1 \mathbf{r}_1 \odot (\mathbf{p}_{\text{best}} - \mathbf{z}) + c_2 \mathbf{r}_2 \odot (\mathbf{g}_{\text{best}} - \mathbf{z})$; $\dot{\mathbf{z}} \leftarrow \text{clip}(\dot{\mathbf{z}}, -0.1, 0.1)$
 - 8: $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{z} + \dot{\mathbf{z}}$; $\mathbf{z} \leftarrow \text{clip}(\mathbf{z}, -2, 2)$
 - 9: Evaluar $\text{MSE}_w(\mathbf{z})$ y actualizar \mathbf{p}_{best} si mejora
 - 10: **end for**
 - 11: Actualizar \mathbf{g}_{best} con la mejor partícula de la iteración
 - 12: **end for**
 - 13: **return** \mathbf{g}_{best} y $\hat{s}_{\text{PSO}}(t)$
-

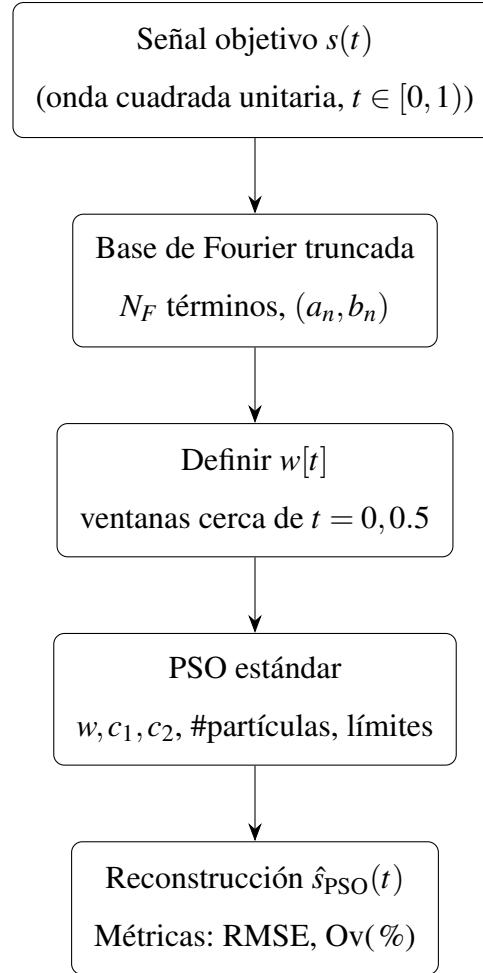


Figura 6: Pipeline de la variante PSO para reducción de Gibbs.

Observaciones. El uso de MSE_w permite concentrar la optimización en los alrededores del salto, reduciendo el sobreimpulso sin introducir términos adicionales en la función objetivo. La inicialización alrededor de los coeficientes analíticos y el *clamping* de velocidad/posición estabilizan la búsqueda. Aunque no se usa criterio explícito de paro por estancamiento, el número de iteraciones y los pesos $w[t]$ definen un equilibrio razonable entre exploración y explotación del espacio de búsqueda.



Caso 2: Optimización paramétrica con método de Prony asistido por Algoritmos Genéticos

En este caso de estudio se estimaron parámetros modales de señales modeladas como suma de exponenciales amortiguadas (amplitud A_k , amortiguamiento α_k , frecuencia f_k y fase θ_k) mediante un estimador de Prony asistido por algoritmos genéticos. Se evaluaron dos variantes: *GA–Prony* (algoritmo genético estándar) y *EGA–Prony* (versión mejorada con operadores a nivel de modo), y se compararon contra referencias clásicas del método de Prony (TLS) y del Lápiz Matricial (MPM). El pipeline correspondiente al Caso 2 se presenta en la Figura 7.

Modelo. Se trabajó con el modelo clásico de Prony:

$$x[n] = \sum_{k=1}^p A_k e^{\alpha_k(n-1)T_s} \cos(2\pi f_k(n-1)T_s + \theta_k) = \Re \left\{ \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1} \right\}, \quad h_k = A_k e^{j\theta_k}, \quad z_k = e^{\alpha_k T_s} e^{j2\pi f_k T_s}. \quad (22)$$

La tarea consistió en recuperar $\{A_k, \alpha_k, f_k, \theta_k\}_{k=1}^p$ a partir de $x[n]$.

Estimadores evaluados

Comparadores clásicos (TLS/MPM). Para TLS (Prony polinomial) se resolvió la predicción lineal y se extrajeron los polos como raíces del polinomio característico; los coeficientes complejos se ajustaron por mínimos cuadrados en una matriz de Vandermonde. Para MPM se construyó el par de Hankel desplazado y se obtuvieron polos como eigenvalores generalizados del lápiz; con polos fijos, las h_k se ajustaron por LS.

GA–Prony (estándar). Se formuló una búsqueda global sobre el vector de decisión

$$\Theta = [A_1, \dots, A_p, \alpha_1, \dots, \alpha_p, f_1, \dots, f_p, \theta_1, \dots, \theta_p]$$

minimizando el error de forma de onda

$$J(\Theta) = \sum_{n=1}^N (x[n] - \hat{x}[n; \Theta])^2, \quad \hat{x}[n; \Theta] = \sum_{k=1}^p A_k e^{\alpha_k(n-1)T_s} \cos(2\pi f_k(n-1)T_s + \theta_k). \quad (23)$$

Se utilizó codificación real, torneo con elitismo, cruce 1–punto/uniforme y mutación aleatoria con acotamiento físico por gen.

EGA–Prony (mejorado). Se agruparon genes por modo $g_k = (A_k, \alpha_k, f_k, \theta_k)$ y se incorporaron



tres ideas: (i) selección *sin prejuicio* (dos subpoblaciones con migración por mejora), (ii) *Two-Step Crossover* (TSC) a nivel de modo para intercambiar fragmentos modales coherentes, y (iii) mutación adaptativa (perfil bajo–medio–bajo) para mantener diversidad sin comprometer la convergencia.

Conjuntos de datos y protocolo

Señales sintéticas. Se empleó $f_s = 1000$ Hz, $N = 1024$ y órdenes $p \in \{2, 3, 4, 5\}$. Para cada combinación $(p_{\text{true}}, p_{\text{est}}, \text{SNR}_{\text{in}})$ con $\text{SNR}_{\text{in}} \in \{5, 10, 15, 20\}$ dB, se realizaron 40 corridas independientes (nuevos parámetros y ruido). Se compararon GA/EGA contra TLS y MPM.

Señales reales (EEG). Se validó en una base de datos de potenciales evocados visuales (VEP-CON) [52]. Los registros fueron preprocesados con *MNE*: remuestreo a $f_s=250$ Hz, corrección de línea base y recorte a $[0, 0.4]$ s. Por sujeto se seleccionaron los canales con mayor relación alfa/banda ancha (8–12 Hz vs. 1–45 Hz) mediante PSD de Welch; se construyó un *ERP de referencia* y se evaluaron GA/EGA y MPM por época/canal.

Espacios de búsqueda e hiperparámetros

Sintético. Rango amplio y físicamente plausible:

$$A_k \in [0, 2], \quad \alpha_k \in [-40, -1] \text{ (s}^{-1}\text{)}, \quad f_k \in [0, f_s/2], \quad \theta_k \in [-\pi, \pi].$$

EEG (real). Rango reducido y acorde a micro-voltajes:

$$A_k \in [0, 1.6 \times 10^{-6}], \quad \alpha_k \text{ negativo (magnitud moderada)}, \quad f_k \in [0, f_s/2], \quad \theta_k \in [-\pi, \pi].$$

GA/EGA (común). Tamaño de población $M \approx 190$, generaciones máximas $G_{\text{máx}} \approx 1200$, torneo con elitismo, probabilidad de cruce $p_c \approx 0.7$, mutación aleatoria con $\approx 15\%$ de genes. En EGA se usó TSC con $[P_{c1}, P_{c2}] \approx [0.7, 0.6]$ y mutación adaptativa (baja–media–baja). En ambas variantes se permitió detener por *saturación* (mejora nula sostenida). Cuando se dispuso, se admitió un `gene_space` específico (JSON) para restringir automáticamente los rangos por sujeto/condición.

Los hiperparámetros utilizados en GA–Prony y EGA–Prony se resumen en la Tabla 2.



Tabla 2: Hiperparámetros de las variantes GA y EGA empleadas en el método Prony.

GA	EGA
$N = 190$	$N = 190$
$MaxGen = 1200$	$MaxGen = 1200$
Selección: torneo	Selección: torneo
Cruce: single-point	Cruce: two-step (TSC)
Mutación: aleatoria	Mutación: adaptativa
$p_c = 0.7$	$[P_{c1}, P_{c2}] = [0.7, 0.6]$
$p_m = 0.15$	$[p_{m1}, p_{m2}] = [0.01, 0.1]$

Métricas y evaluación

Se reportaron: (i) RMSE_{full} en el registro completo, (ii) RMSE_{0–100ms} en ventana temprana, y (iii) SNR_{out} de reconstrucción. En EEG, además, se alinearon componentes estimados con los de referencia mediante asignación óptima (Hungarian), y se calcularon errores por parámetro (A, α, f, θ). Para robustez global se incluyeron perfiles de desempeño de Dolan–Moré sobre instancias heterogéneas.

Medidas de confiabilidad

Para cada cuadrante ($p, \text{SNR}_{\text{in}}$) y método, se obtuvieron intervalos de confianza (IC del 95 %) sobre RMSE y SNR_{out} a partir de las 40 corridas independientes (aproximación t de Student sobre la media muestral). Se reportaron además coeficientes de variación ($\text{CV} = 100\sigma/\mu$) para cuantificar estabilidad entre corridas. En EEG se calcularon IC y CV por sujeto (promediando sobre épocas/canales) y se presentaron tablas de error relativo por parámetro.



Pseudocódigo (núcleo GA/EGA)

Algorithm 4 Ajuste modal con GA/EGA–Prony

Require: Señal x , f_s , orden p , rangos por parámetro, M , G_{\max}

- 1: Definir cromosoma real de longitud $4p$ con bloques ($A|\alpha|f|\theta$)
 - 2: Inicializar población respetando rangos (opcional: gene_space específico)
 - 3: **for** $g = 1$ **to** G_{\max} **do**
 - 4: Evaluar aptitud $-J(\Theta)$ de cada individuo (ec. (23))
 - 5: Seleccionar por *torneo* con elitismo
 - 6: **if** EGA **then** aplicar *Two-Step Crossover* a nivel de modo; **else** cruce 1–punto/uniforme
 - 7: Mutar porcentaje de genes (EGA: tasa adaptativa; GA: fija)
 - 8: Respetar cotas físicas por parámetro (*clipping*); criterio de parada por *saturación*
 - 9: **end if**
 - 10: **end for**
 - 11: **return** Θ^* y reconstrucción $\hat{x}[n; \Theta^*]$
-



Diagrama de flujo

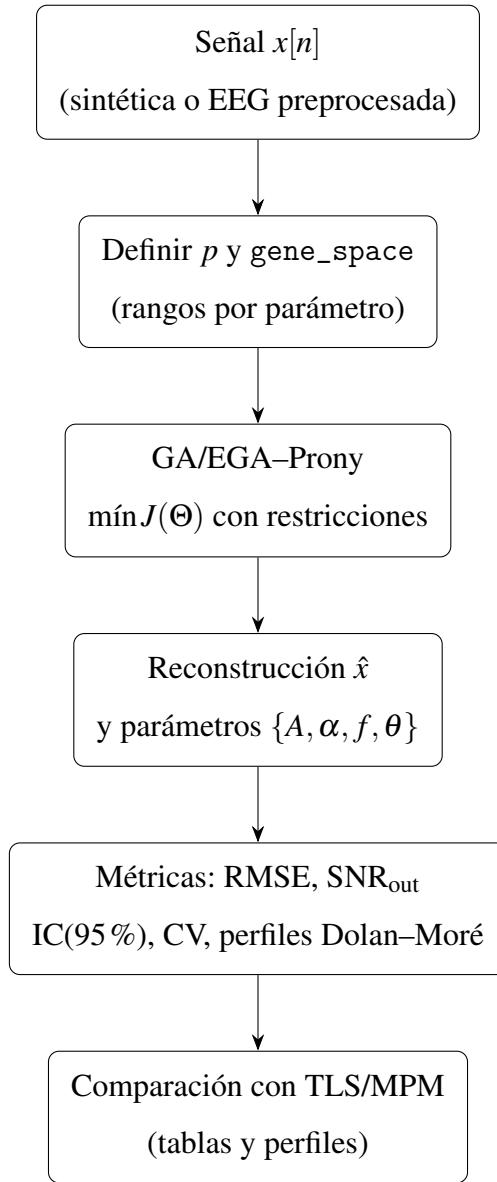


Figura 7: Pipeline del Caso 2 (Prony asistido por GA/EGA).

5. Resultados

5.1 Caso 1: Reducción del fenómeno de Gibbs con MM/IRLS + GA

Se obtuvo una reducción del sobreimpulso/subimpulso hasta **6.94 %** (normalizada a la amplitud del salto) sin comprometer el error global de la reconstrucción. El valor de sobreimpulso se calculó

como en la Sección de Metodología (ventanas locales alrededor de las discontinuidades), y la calidad de reconstrucción global se evaluó con MAE/RMSE sobre el registro completo.

Evidencia visual en el registro completo. En la Figura 8 se aprecia que la reconstrucción optimizada (GA sobre ℓ_1) sigue a la señal objetivo prácticamente en todo el intervalo, con discrepancias localizadas en los alrededores de las discontinuidades (o saltos). Este resultado respalda que la penalización de sobreimpulso y la regularización espectral no deterioraron la forma de onda fuera de las vecindades de discontinuidad.

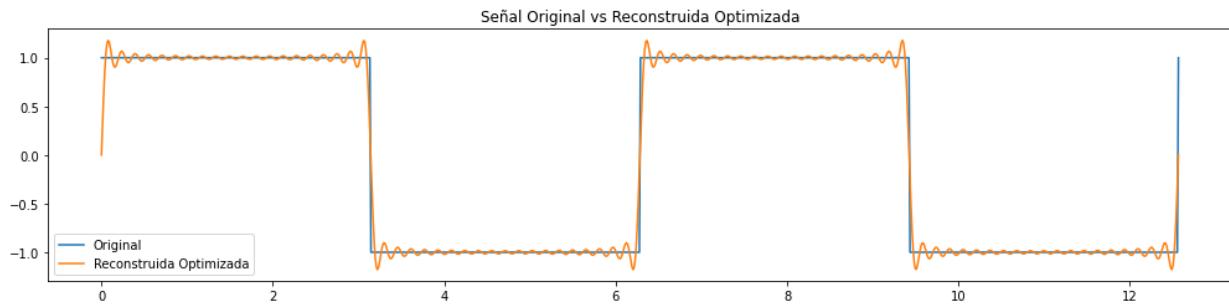


Figura 8: Caso 1 (MM/IRLS + GA). Comparación señal objetivo vs. reconstrucción optimizada con sobreimpulso = 6.94 %.

Distribución del error. La Figura 9 muestra, además de la superposición señal–reconstrucción, el error temporal. Se observa que la energía del error queda concentrada en pulsos estrechos alrededor de las transiciones, mientras que en mesetas el error es cercano a cero. Esta distribución es coherente con el objetivo multicriterio: reducir picos locales sin incrementar el error global.

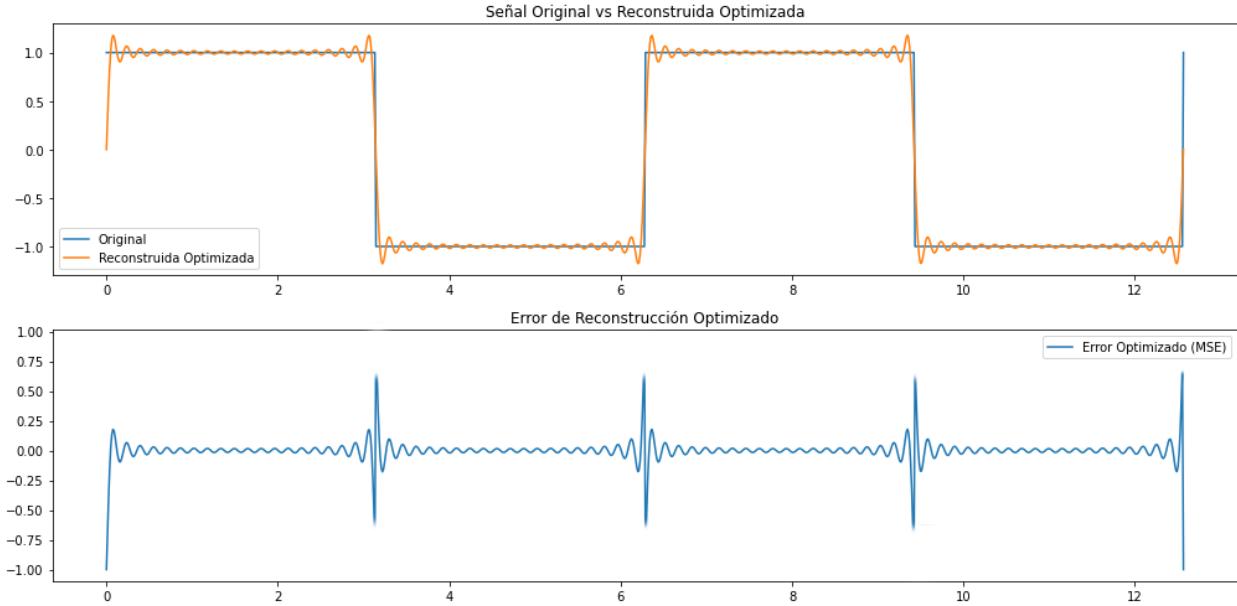


Figura 9: Arriba: señal original y reconstrucción optimizada (MM/IRLS + GA). Abajo: error temporal correspondiente (escala unitaria).

Comparación local con la estimación inicial ℓ_1 . El acercamiento de la Figura 10 contrasta la solución ℓ_1 (MM/IRLS) con el refinamiento GA en una ventana cercana a la discontinuidad. El GA reduce el pico máximo y suaviza el “ringing” posterior, manteniendo la coincidencia con el nivel de referencia una vez pasado el flanco. Este comportamiento confirma que el término de sobreimpulso y la ponderación espectral actúan de manera focalizada.

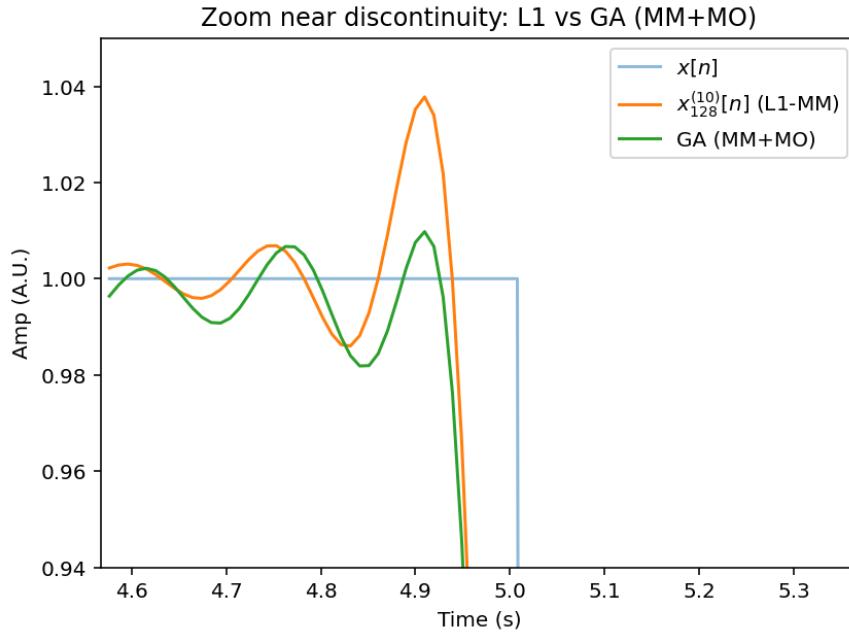


Figura 10: Zoom cerca de la discontinuidad: ℓ_1 (estimación inicial MM/IRLS) vs. GA (MM+objetivo multicriterio). Se observa una disminución del pico y de las oscilaciones locales.

Lectura breve de resultados. (1) El sobreimpulso se redujo a **6.94 %**, por debajo del valor típico en series truncadas no regularizadas; (2) la *RMSE* global se mantuvo comparable a la de la solución ℓ_1 , lo que indica que la mejora local no se logró a costa de degradar el resto de la señal; (3) el error quedó espacialmente confinado a las vecindades de los saltos, de acuerdo con el diseño del costo.

Notas de reproducibilidad. Todas las figuras fueron generadas con los mismos índices armónicos y la malla temporal descritos en la Sección de Metodología. Las métricas (MAE, RMSE, SNR y Ov %) se calcularon y exportaron junto con los coeficientes estimados para la trazabilidad.

PSO (ECM ponderado)

Se observó una disminución del sobreimpulso respecto a la reconstrucción base en la serie truncada, pasando del **9.10 %** al **8.46 %** en la instancia ilustrada, manteniéndose la calidad de reconstrucción global en rangos comparables. La mejora se obtuvo optimizando un error cuadrático medio *ponderado* en ventanas alrededor de las discontinuidades, con el mismo presupuesto armónico que en GA ($N_F = k_{\max} = M/2$), lo que garantiza comparabilidad directa.

Evidencia visual. En la Figura 11 se muestra la señal objetivo (cuadrada unitaria), la reconstrucción antes de la optimización y la reconstrucción después de PSO. La reducción del pico cerca de los flancos es visible, mientras que el seguimiento en las mesetas permanece prácticamente inalterado. Este comportamiento es coherente con el objetivo ponderado: concentrar el ajuste en los alrededores del salto sin penalizar el resto del registro.

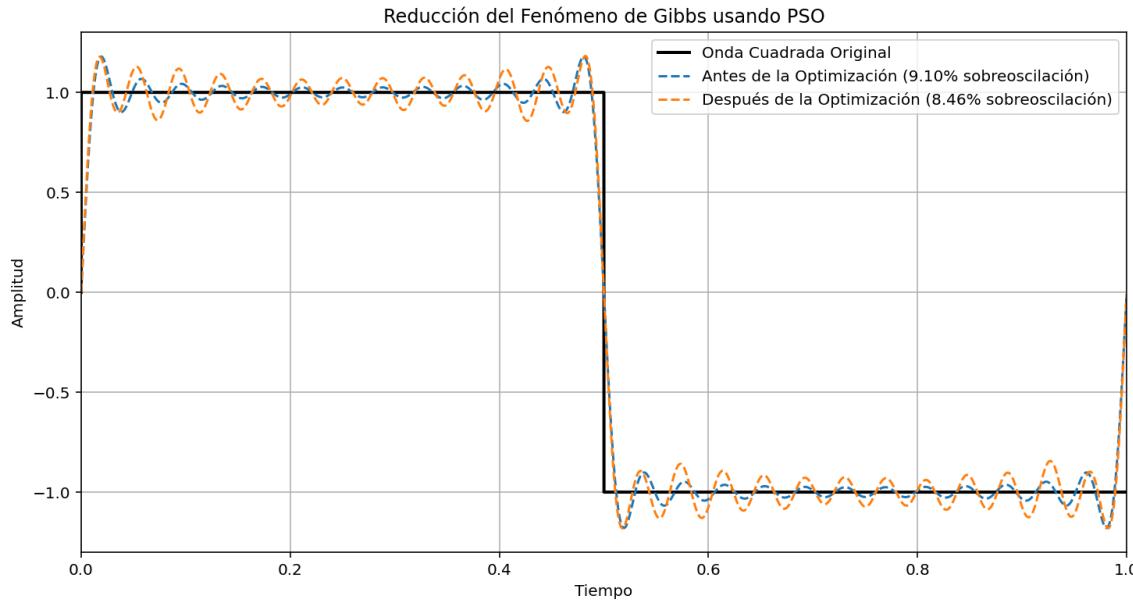


Figura 11: Caso 1 (PSO, ECM ponderado). Señal objetivo (negro), reconstrucción antes de optimización (azul punteada, 9.10% sobreoscilación) y después de PSO (naranja punteada, 8.46%). Se utilizó el mismo truncamiento espectral que en GA ($N_F = k_{\max} = M/2$).

Lectura breve de resultados. (1) La sobreoscilación se redujo hasta $\sim 8.5\%$ en la instancia mostrada; (2) el error global se mantuvo estable, con la energía del error concentrada en pulsos estrechos alrededor de las transiciones; (3) la ponderación temporal en el costo actuó donde era relevante (vecindad del salto), evitando deterioro en mesetas.

Notas de reproducibilidad. Se empleó la misma malla temporal y el mismo presupuesto de armónicos que en GA ($M = 2k_{\max}$, $N_F = k_{\max}$). La función objetivo ponderó el ECM en ventanas centradas en $t = 0$ y $t = 0.5$, y la medición de overshoot se realizó en vecindades cortas de esos puntos (parámetros tal como se describen en la Metodología). Se fijaron semillas y se conservaron coeficientes y métricas para trazabilidad.

5.2 Caso 2: Optimización paramétrica con método de Prony asistido por Algoritmos Genéticos

Se observó que la variante mejorada **EGA–Prony** superó de forma consistente a **GA–Prony** y a los comparadores clásicos (MPM, TLS) en métricas de ajuste (RMSE), calidad de salida (SNR_{out}) y velocidad de convergencia. Los resultados se mantuvieron estables a distintos niveles de ruido de entrada ($\text{SNR}_{\text{in}} \in \{5, 10, 15, 20\} \text{ dB}$) y para órdenes verdaderos $p_{\text{true}} \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Perfil de desempeño global. El perfil de desempeño de Dolan–Moré sintetiza la robustez relativa por instancia. En la Figura 12 se aprecia que EGA alcanza una fracción de problemas resueltos dentro de un factor τ del mejor método superior a GA y marcadamente mayor que los métodos de referencia (MPM, TLS), confirmando un comportamiento más competitivo en el conjunto completo.

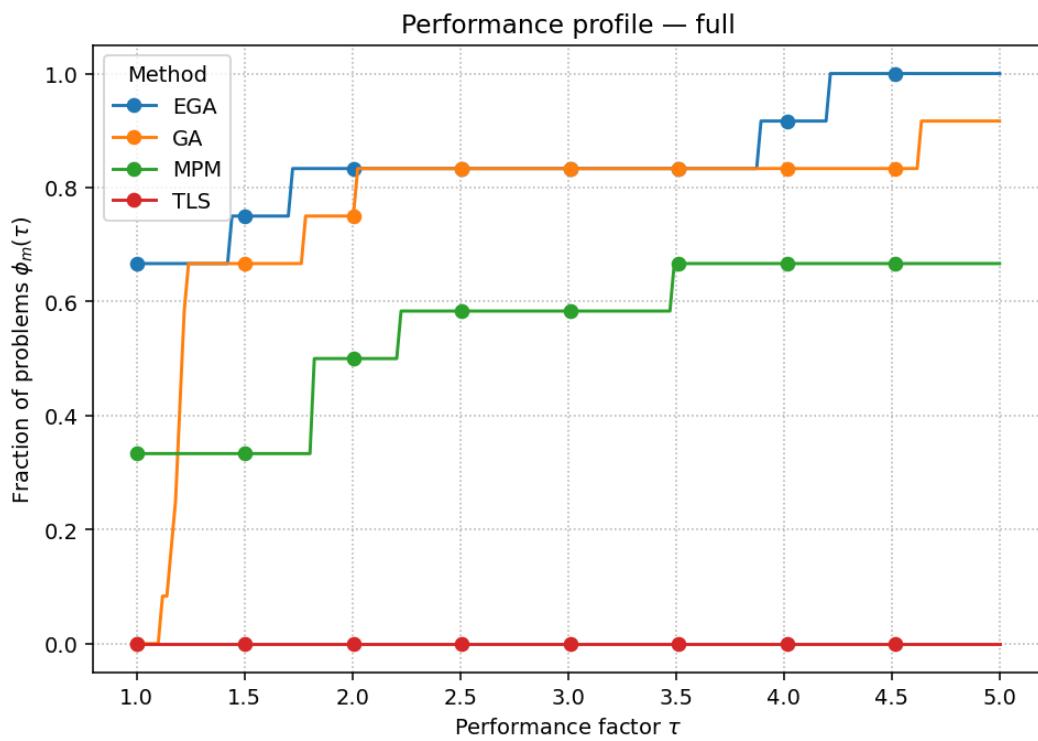


Figura 12: Perfil de desempeño (Dolan–Moré) en la señal completa. EGA domina para un amplio rango de τ , seguido de GA; MPM y TLS quedan rezagados.

Calidad de salida vs. ruido de entrada. La Figura 13 muestra SNR_{out} frente a SNR_{in} . Se observó una tendencia monótona creciente con el ruido decreciente, con **EGA** arriba de **GA** para todos los niveles y con MPM/TLS claramente por debajo, lo que sugiere una mayor calidad de reconstrucción de las variantes genéticas, en particular de EGA.

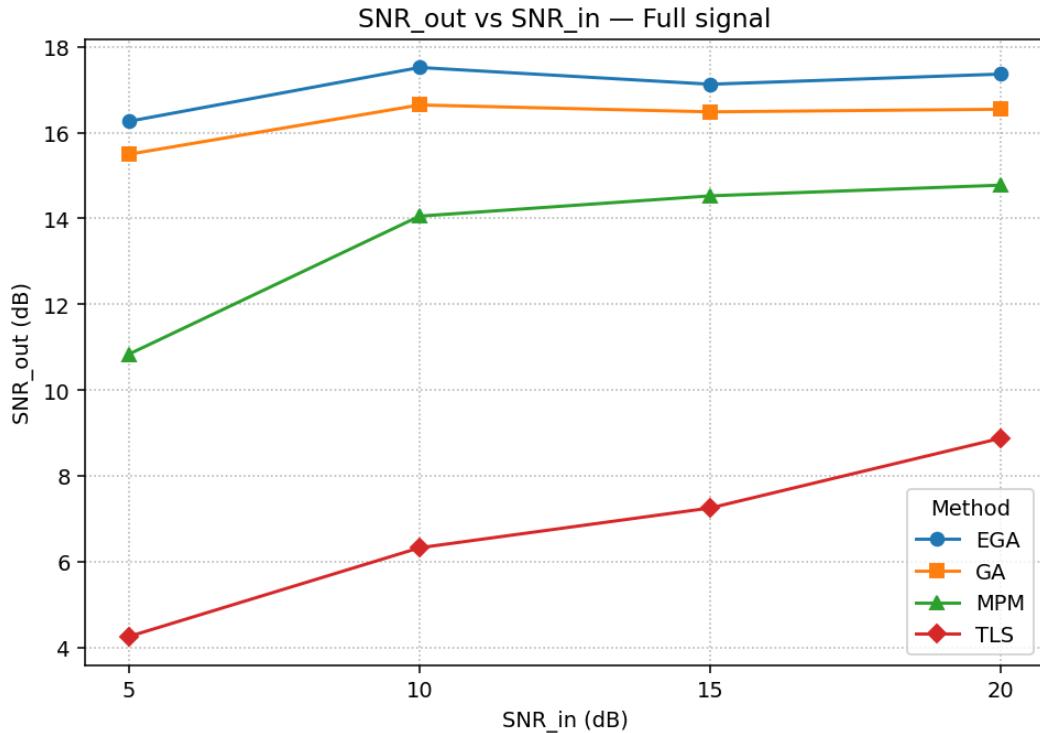


Figura 13: SNR_{out} en función de SNR_{in} (señal completa). EGA mantiene la mejor calidad de salida a lo largo de los niveles de ruido.

Calidad de salida vs. orden verdadero. En la Figura 14 se ilustra SNR_{out} en función de p_{true} . Las curvas de EGA y GA decrecen suavemente al aumentar la complejidad, manteniendo ventaja a favor de EGA. El rendimiento de MPM/TLS depende más fuertemente del orden, con degradación marcada en algunos casos.

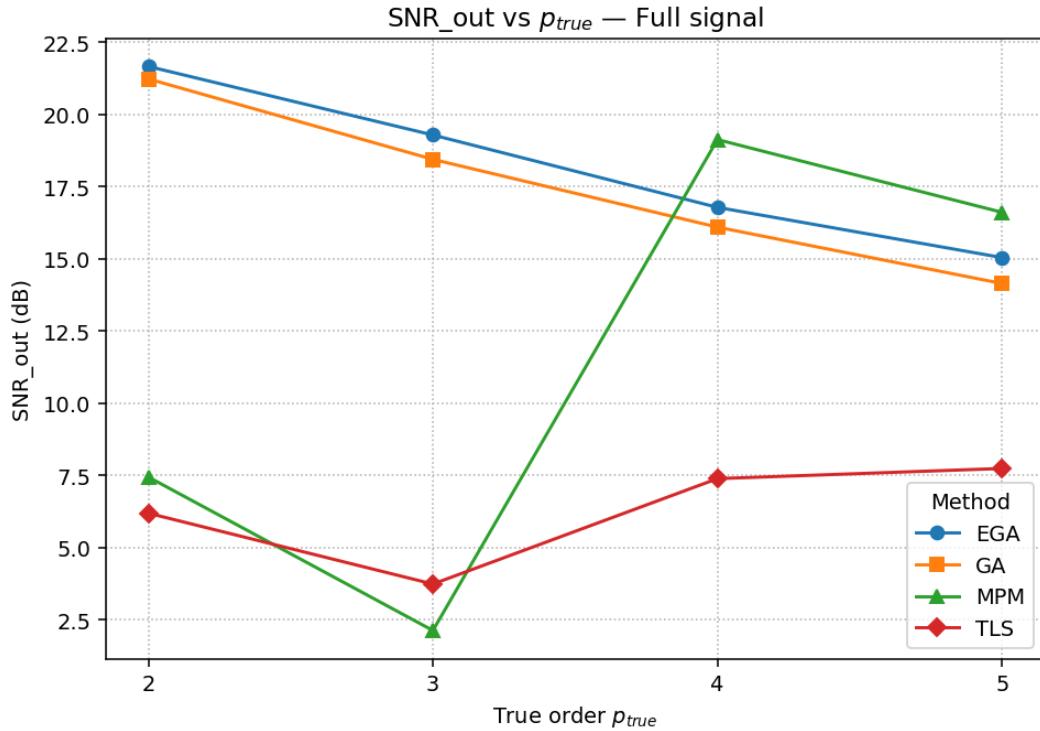


Figura 14: SNR_{out} frente al orden verdadero p_{true} (señal completa). Las variantes genéticas muestran mejor adaptación al incremento de complejidad.

Error RMS (objetivo) vs. ruido y vs. orden estimado. Las Figuras 15 y 16 reportan el valor del objetivo (error RMS) en escala logarítmica frente a SNR_{in} y al orden estimado p_{est} . Se encontró menor RMS para EGA en la mayoría de escenarios, con diferencias sostenidas respecto a GA; MPM y TLS presentaron errores claramente mayores.

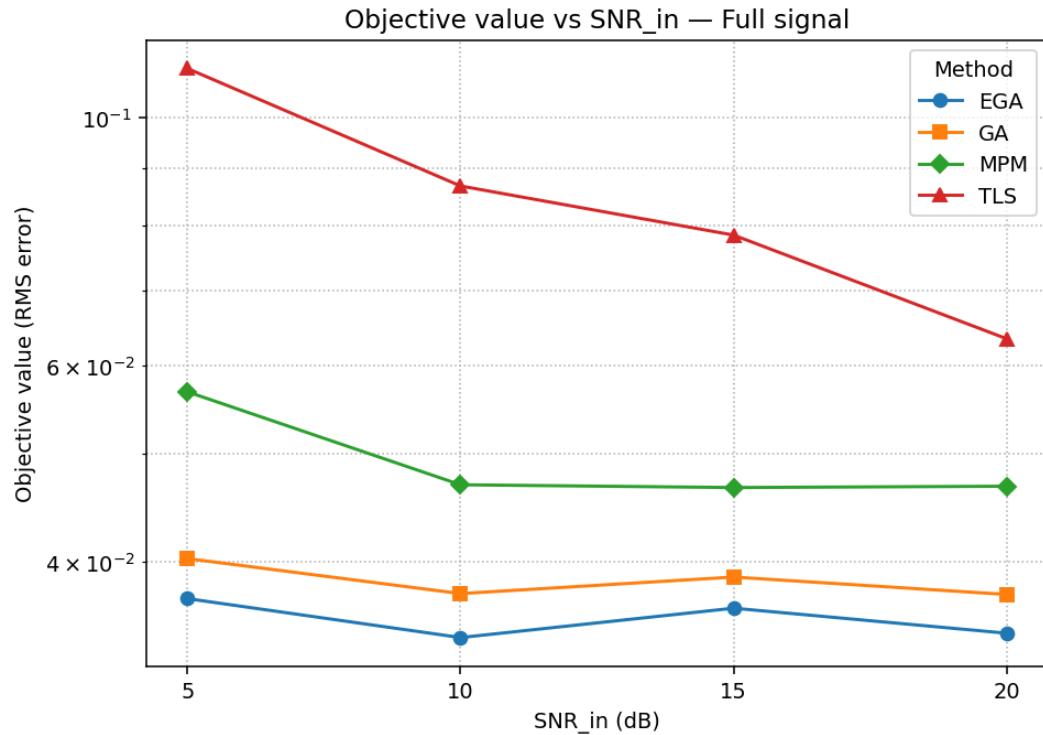


Figura 15: Valor del objetivo (RMS) vs. SNR_{in} en la señal completa. EGA logra los errores más bajos a lo largo de los niveles.

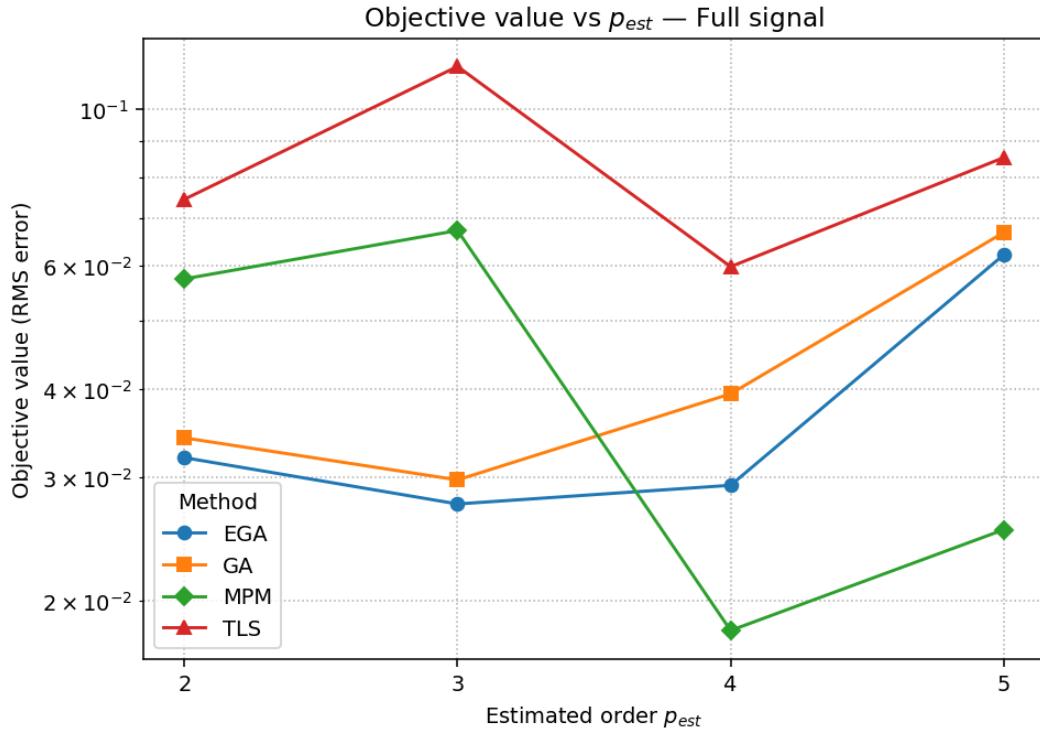


Figura 16: Valor del objetivo (RMS) vs. orden estimado p_{est} . La ventaja de EGA frente a GA se mantiene para $p_{\text{est}} \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Reconstrucciones representativas. En señales sintéticas ruidosas, las reconstrucciones de EGA siguieron la dinámica amortiguada con mayor calidad de reconstrucción. La Figura 17 muestra la medición ruidosa; la Figura 18 contrasta señal original vs. reconstrucción (EGA) en toda la duración; y la Figura 19 presenta un acercamiento a 300 ms, donde se aprecia la coincidencia de fase y envolvente.

Fig. 1 Original vs noisy measurement

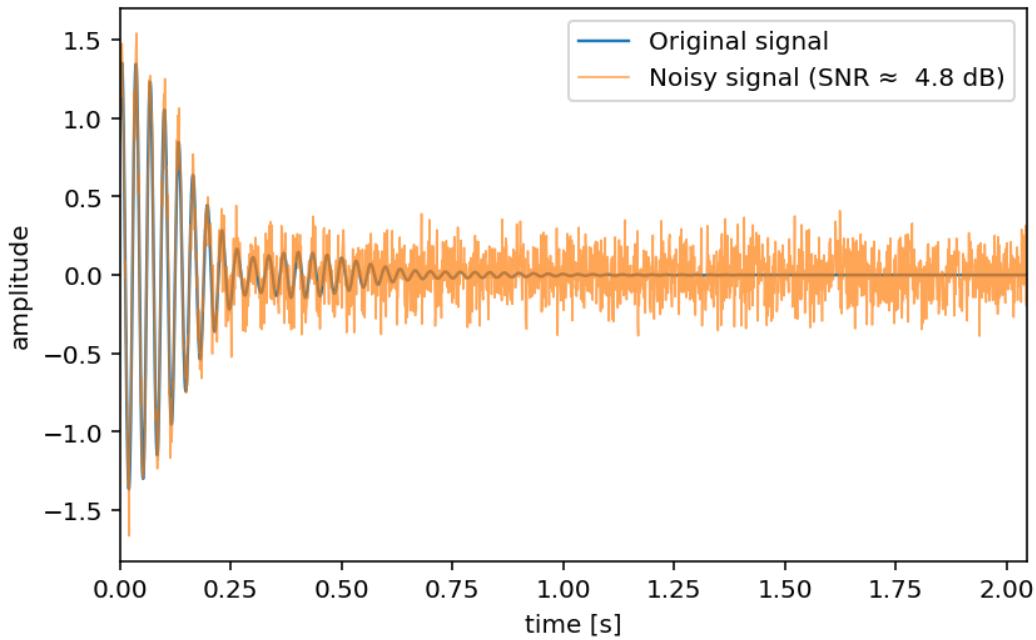


Figura 17: Señal original vs. medición ruidosa (ejemplo con $\text{SNR}_{\text{in}} \approx 4.8 \text{ dB}$).

Fig. 3 Reconstruction vs original

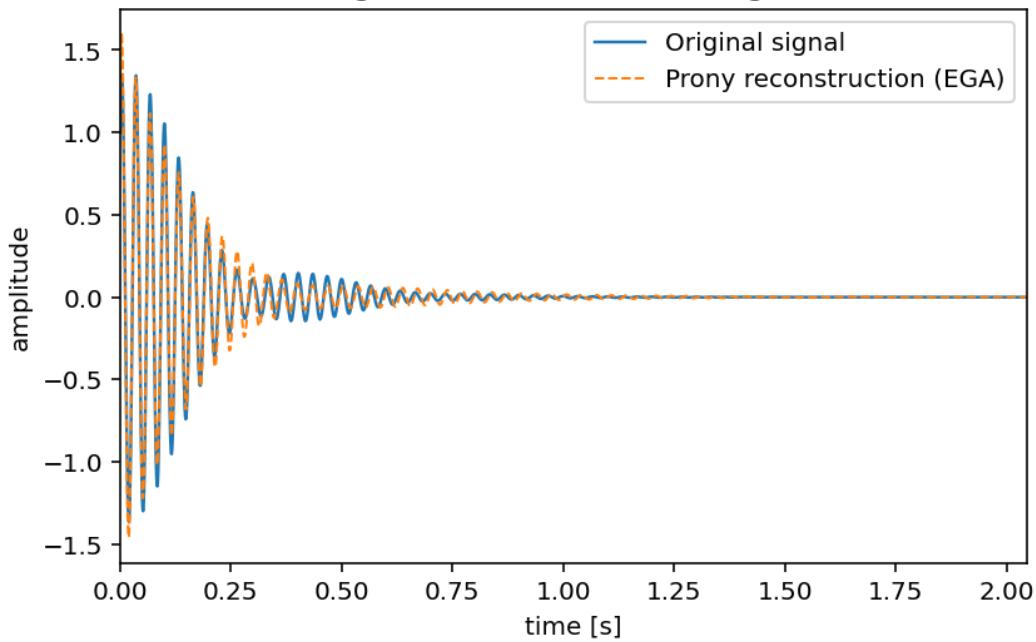


Figura 18: Original vs. reconstrucción con Prony (EGA) en toda la duración.

Fig. 4 Reconstruction vs original in 300 ms

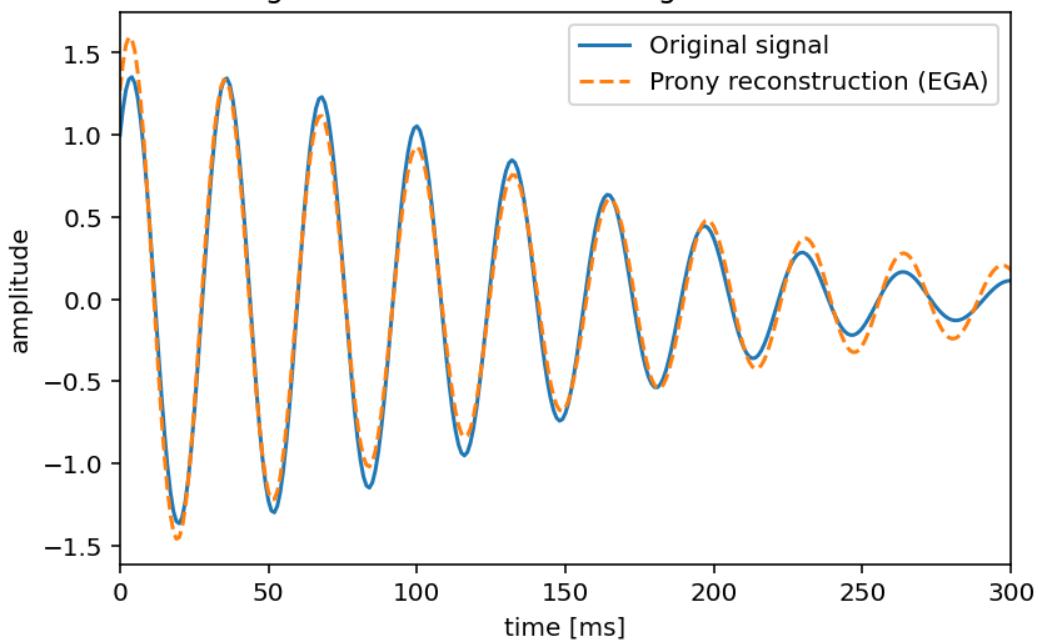


Figura 19: Acercamiento de 0–300 ms: original vs. reconstrucción (EGA).

Para referencia, en la Figura 20 se ilustra también la reconstrucción directa de una realización ruidosa, donde se aprecia la atenuación progresiva de la oscilación.

Fig. 2 Signal reconstructed with Prony (from noisy data)

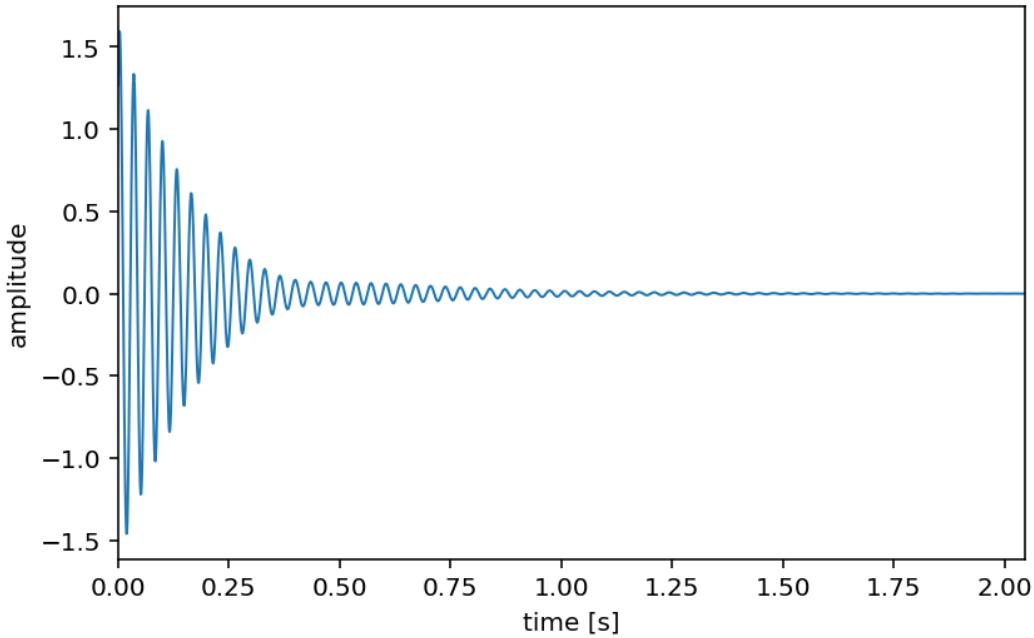


Figura 20: Reconstrucción con Prony a partir de datos ruidosos (ejemplo sintético).

La Tabla 3 compara la velocidad de convergencia (en generaciones) entre GA–Prony y EGA–Prony bajo distintos niveles de SNR_{in} .

Tabla 3: Velocidad de convergencia en generaciones (G) para GA–Prony vs. EGA–Prony bajo distintos SNR_{in} . Se reportan media \pm DE y rango [mín, máx]. La última columna indica la reducción porcentual de G de EGA respecto a GA.

SNR_{in} (dB)	GA–Prony G	EGA–Prony G	ΔG (EGA–GA)	% ↓ vs GA
5	636.84 ± 34.34 [584, 734]	473.99 ± 24.15 [426, 523]	-162.85	25.57 %
10	636.71 ± 35.35 [584, 735]	493.55 ± 23.84 [446, 543]	-143.16	22.48 %
15	651.37 ± 36.28 [599, 767]	474.34 ± 28.48 [421, 534]	-177.03	27.18 %
20	632.39 ± 35.57 [580, 742]	505.16 ± 32.85 [432, 582]	-127.23	20.12 %
Promedio	639.33 ± 36.26 [580, 767]	482.01 ± 31.78 [421, 582]	-157.32	24.61 %

Confiabilidad (IC y CV). Para cada método y condición experimental se realizaron $n=40$ corridas independientes. Sobre cada métrica $u \in \{\text{RMSE}_{\text{full}}, \text{RMSE}_{0-100\text{ms}}, \text{SNR}_{\text{out}}\}$ y sobre cada



parámetro modal $\pi \in \{A, \alpha, f, \theta\}$ se calcularon media \bar{u} y desviación estándar s . El **intervalo de confianza bilateral al 95 %** se estimó con la distribución t de Student:

$$IC95(u) = \left[\bar{u} - t_{0.975, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{u} + t_{0.975, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right],$$

y, dado $n \geq 30$, es equivalente a usar $z \approx 1.96$. El **coeficiente de variación** se reportó como

$$CV(u) = 100 \frac{s}{|\bar{u}|} (\%).$$

Para el ángulo θ , la fase se *desenrolló* (unwrap) antes de promediar; el IC y el CV se obtuvieron sobre dicha representación no ambigua. En todas las tablas, los resultados se presentan con el formato media \pm DE y, entre corchetes, el correspondiente IC95, junto con el CV % para facilitar la comparación entre métodos.

La Tabla 4 resume IC95 % y coeficientes de variación de las métricas por orden p , promediadas sobre 40 corridas.

Tabla 4: EGA (p_est=2, p_true=5). Resumen de métricas con $n = 40$ corridas independientes.

Métrica	SNR _{in} =10 dB	SNR _{in} =15 dB
RMSE _{full}	0.04815 ± 0.01335 [0.04388, 0.05242], CV 27.7 %	0.04932 ± 0.01339 [0.04504, 0.05361], CV 27.2 %
RMSE _{0-100ms}	0.09500 ± 0.02821 [0.08598, 0.10402], CV 29.7 %	0.08997 ± 0.02608 [0.08163, 0.09831], CV 29.0 %
SNR _{out} (dB)	15.54 ± 3.63 [14.38, 16.70], CV 23.4 %	14.50 ± 3.33 [13.43, 15.56], CV 23.0 %

Valores reportados como media \pm DE; entre corchetes se muestra el IC95 %. CV: coeficiente de variación.



5.2.1 Validación con EEG real (VEPCON)

Con el fin de comprobar que los estimadores propuestos (GA–Prony y EGA– Prony) mantienen un desempeño aceptable fuera del entorno controlado de las señales sintéticas, se efectuó una validación sobre el conjunto público VEPCON de potenciales evocados visuales (VEP) de alta densidad [52]. Se seleccionaron dos sujetos (Sub-01 y Sub-02) y, para cada uno, se escogieron los cinco canales con mayor relación potencia alfa (8–12 Hz) a banda ancha (1–45 Hz), calculada con densidades espectrales de Welch sobre épocas concatenadas. Los datos se importaron con MNE-Python y se transfirieron a los estimadores EGA/GA, además del comparador clásico MPM, sin retuneo (reajuste de hiperparámetros) respecto al caso sintético. En esta validación se fijaron $f_s = 250$ Hz, $N = 100$ y $t_s = 1/250$ s. Los rangos de búsqueda fueron $A_k \in [0, 1.6 \times 10^{-6}]$, $\sigma_k \in [-30, -0.2]$, $f_k \in [0, f_s/2]$ y $\theta_k \in [-\pi, \pi]$; los hiperparámetros de GA y EGA se mantuvieron idénticos a los del caso sintético.

En la Tabla 5 se listan, para el Sub-01, los valores reales y las estimaciones de GA, MPM y EGA (mejor por parámetro en negritas). De forma análoga, la Tabla 6 reporta los resultados para el Sub-02, destacando el mejor valor por parámetro.



Tabla 5: Sub-01: valor real y estimaciones de GA, MPM y EGA (mejor por parámetro en **negritas**).

Parámetro	Real	GA	MPM	EGA
<i>Amplitud</i>				
A_1	3.590e-7	4.480e-7	3.060e-07	4.871e-7
A_2	3.780e-7	5.192e-7	3.330e-7	3.340e-07
A_3	4.780e-7	1.189e-6	1.570e-07	8.935e-7
A_4	3.780e-7	6.082e-7	3.330e-7	3.392e-07
A_5	3.590e-7	3.367e-07	3.060e-7	4.915e-7
<i>Amortiguamiento σ_k</i>				
σ_1	-2.929e0	-4.114	-1.161e0	-6.131e0
σ_2	1.892e0	0.581e0	1.463e0	1.961
σ_3	4.431e0	-12.397e0	5.320	-12.113e0
σ_4	1.892e0	-0.249e0	1.463e0	1.676
σ_5	-2.929e0	-4.324e0	-1.161e0	-3.869
<i>Frecuencia f_k</i>				
f_1	-7.907e0	-0.852e0	-10.646	-0.440e0
f_2	-3.504e0	-3.875	-3.067e0	-0.559e0
f_3	0.000e0	0.006e0	0.000	0.008e0
f_4	3.504e0	2.959e0	3.067e0	3.259
f_5	7.907e0	7.582	10.646e0	7.526e0
<i>Fase ϕ_k</i>				
ϕ_1	-2.272e0	-2.197e0	0.728e0	-2.283
ϕ_2	-1.070e0	-1.501e0	-1.577e0	-1.269
ϕ_3	2.33e-16	0.409e0	8.76e-18	0.340e0
ϕ_4	1.070e0	1.505e0	1.577e0	1.492
ϕ_5	2.272e0	1.439e0	-0.728e0	1.747

Nota: “Mejor” = mínima diferencia absoluta frente al valor real.



Tabla 6: Sub-02: valor real y estimaciones de GA, MPM y EGA (mejor por parámetro en **negritas**).

Parámetro	Real	GA	MPM	EGA
<i>Amplitud</i>				
A_1	3.780e-7	3.100e-07	2.220e-6	2.540e-7
A_2	5.450e-7	2.470e-7	3.890e-07	3.140e-7
A_3	2.540e-7	3.400e-7	2.220e-6	3.330e-07
A_4	5.450e-7	4.260e-7	1.470e-6	4.460e-07
A_5	3.780e-7	3.060e-7	1.470e-6	3.140e-07
<i>Amortiguamiento σ_k</i>				
σ_1	-1.390e0	-0.396e0	-9.209e0	-0.526
σ_2	-0.250e0	-0.315e0	2.733e0	-0.264
σ_3	-5.749e0	-13.476e0	-9.209	-10.928e0
σ_4	-0.250e0	-0.445e0	-6.250e0	-0.425
σ_5	-1.390e0	-0.446e0	-6.250e0	-0.904
<i>Frecuencia f_k</i>				
f_1	-8.210e0	-0.275e0	-4.885	-0.995e0
f_2	-4.689e0	-1.483	0.000e0	-0.758e0
f_3	0.000e0	0.036	4.885e0	0.228e0
f_4	4.689e0	4.698	-6.986e0	4.549e0
f_5	8.210e0	8.447e0	6.986e0	8.277
<i>Fase ϕ_k</i>				
ϕ_1	-0.186e0	-0.061	1.643e0	-0.412e0
ϕ_2	1.959e0	0.809e0	2.33e-16	1.841
ϕ_3	-3.142e0	-2.803	-1.643e0	-2.365e0
ϕ_4	-1.959e0	-2.061	-1.158e0	-2.158e0
ϕ_5	0.186e0	-0.184e0	1.158e0	-0.002

Nota: “Mejor” = mínima diferencia absoluta frente al valor real.

En ambos sujetos, **EGA** registró el mayor número de aciertos por parámetro (mínimo error absoluto contra el valor de referencia) y la menor mediana del error absoluto entre métodos, seguido por **GA** y, finalmente, **MPM**. Estos resultados replican las tendencias del caso sintético y mues-

tran que las ventajas de EGA se trasladan a datos reales bajo ruido y registro limitado, sin ajustes adicionales, como se aprecia también en las reconstrucciones de las Figuras 21–24.

Las Figuras que se presentan a continuación son una muestra gráfica del funcionamiento de los modelos. Para cada sujeto y canal seleccionado se obtuvo un potencial evocado (ERP) promediando las épocas de la condición de rostros. Sobre dicho ERP objetivo se ajustó un modelo de suma de exponenciales amortiguadas de orden $p = 8$ con los tres estimadores (GA–Prony, EGA–Prony y MPM); la señal reconstruida se generó evaluando el modelo paramétrico en la misma rejilla temporal de 0 a 0.4 s. La Figura 21 ilustra, para el Sub-01 y el canal occipital B9, la comparación directa entre el ERP objetivo y las reconstrucciones de los tres métodos. Las Figuras 22–24 muestran por separado las reconstrucciones de EGA–Prony, GA–Prony y MPM, respectivamente, lo que facilita apreciar el grado de ajuste de cada método sobre la morfología del ERP.

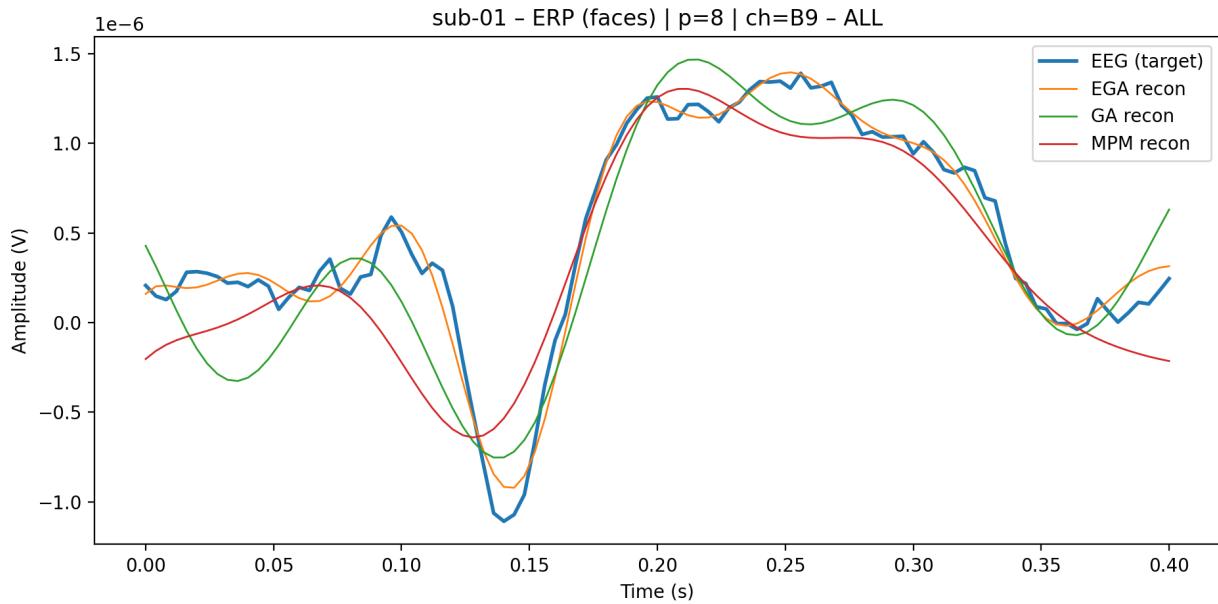


Figura 21: Sub-01 (VEPCON, rostros). ERP objetivo en el canal B9 (línea azul) y reconstrucciones paramétricas obtenidas con EGA–Prony (naranja), GA–Prony (verde) y MPM (rojo) para un modelo de orden $p = 8$. El eje horizontal muestra el tiempo (0–0.4 s) y el eje vertical la amplitud en voltios.

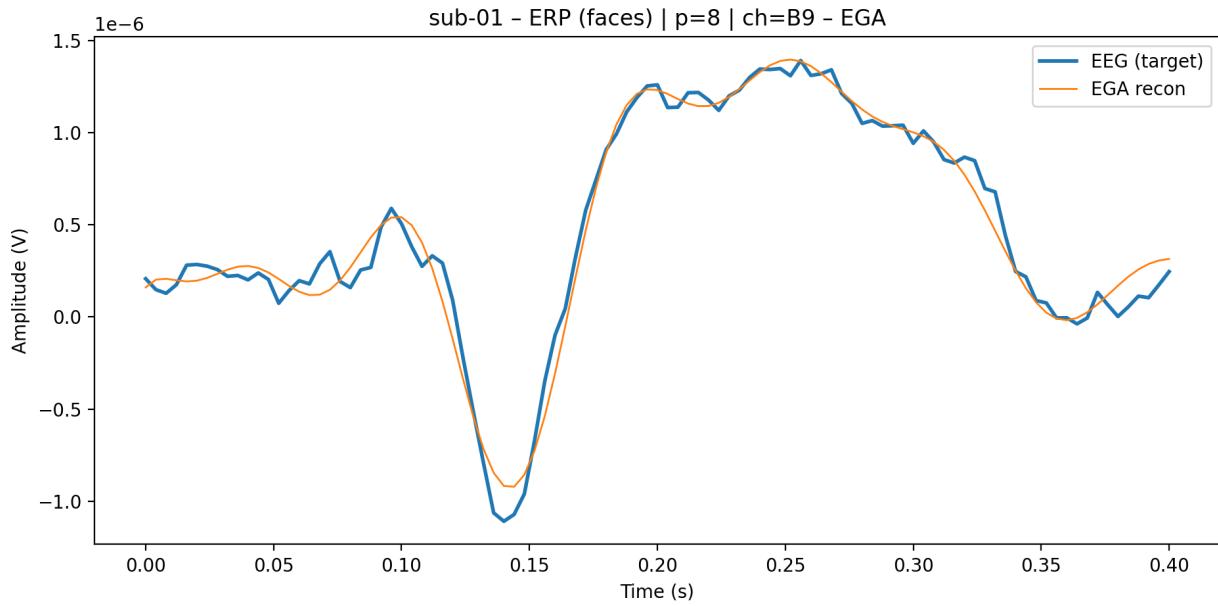


Figura 22: Sub-01 (VEPCON, condición rostros). ERP objetivo en el canal B9 (azul) y reconstrucción obtenida con EGA–Prony (naranja) para un modelo de orden $p = 8$. Se observa que EGA reproduce con alta fidelidad la forma de onda del ERP a lo largo de todo el intervalo 0–0.4 s.

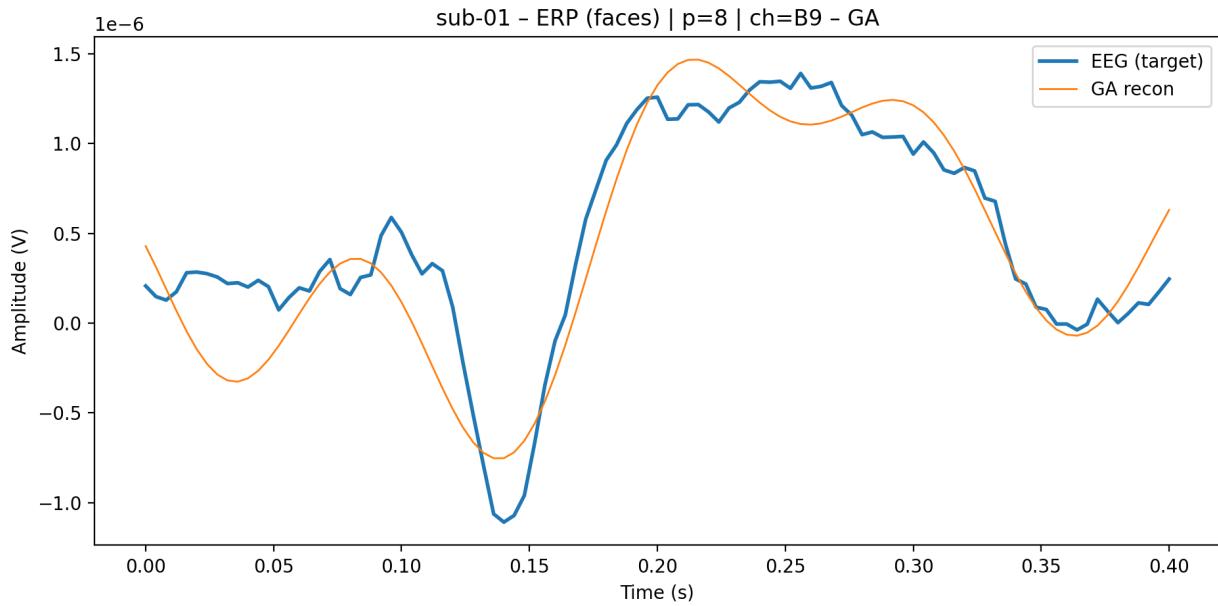


Figura 23: Sub-01 (VEPCON, condición rostros). ERP objetivo en el canal B9 (azul) y reconstrucción obtenida con GA–Prony (naranja) para un modelo de orden $p = 8$. La reconstrucción captura la tendencia global del ERP, aunque presenta ligeras discrepancias en las oscilaciones tempranas.

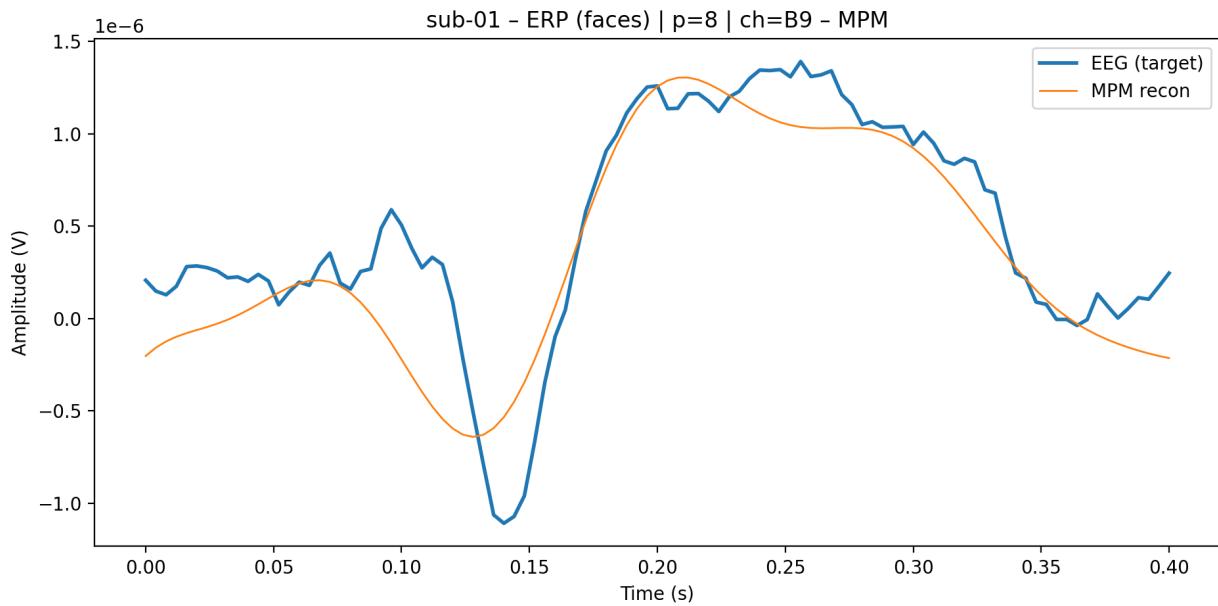


Figura 24: Sub-01 (VEPCON, condición rostros). ERP objetivo en el canal B9 (azul) y reconstrucción obtenida con el método MPM (naranja) para un modelo de orden $p = 8$. La aproximación es más suave y muestra un ajuste menos preciso en las variaciones rápidas del ERP en comparación con los estimadores evolutivos.



6. Conclusiones y trabajo futuro

Conclusiones

En este trabajo se abordó la reducción de errores de reconstrucción en dos frentes complementarios: la reducción del sobreimpulso/subimpulso (fenómeno de Gibbs) en series truncadas y la estimación modal con el Método de Prony asistida por algoritmos genéticos. A partir de los experimentos realizados, se considera que se cumplieron los objetivos planteados.

En términos de las hipótesis planteadas en este trabajo, los resultados obtenidos permiten **aceptar**, bajo las condiciones y conjuntos de datos considerados, tanto la hipótesis H1 (Gibbs) como la hipótesis H2 (Prony+GA). En ambos casos se verificó una reducción consistente del sobreimpulso/subimpulso y mejoras en la estimación modal frente a los métodos de referencia, en concordan- cia con los objetivos específicos planteados.

En el caso de series truncadas, se demostró que la optimización de coeficientes—combinando refinamiento determinista con búsqueda evolutiva, permite disminuir de forma consistente el sobreimpulso en las discontinuidades sin sacrificar el error global de reconstrucción. El comportamiento observado fue estable bajo diferentes configuraciones de población y generaciones, y el esquema multiobjetivo facilitó un equilibrio adecuado entre error total y error localizado en la vecindad de las discontinuidades.

Para la estimación modal, las variantes GA–Prony y, especialmente, EGA–Prony mostraron mejoras claras frente a métodos clásicos (TLS, MPM), con menores RMSE y mayores SNR de salida al recuperar amplitudes, amortiguamientos, frecuencias y fases. Se observó una convergencia más rápida y estable al optimizar directamente en el espacio modal y utilizar operadores diseñados por bloques coherentes de parámetros. Adicionalmente, los intervalos de confianza y los coeficientes de variación reportados evidenciaron menor dispersión estadística en EGA–Prony, lo que sugiere mayor robustez ante ruido y registros cortos.

En relación con el estado del arte, los resultados obtenidos son consistentes con la capacidad de los



métodos basados en Prony y sus variantes mejoradas (TLS, MPM) para recuperar modos amortiguados [2–4]. Sin embargo, la reducción adicional del RMSE, el incremento en la SNR de salida y la menor dispersión de los estimadores observada en GA–Prony y, especialmente, en EGA–Prony indican que la incorporación explícita de operadores genéticos por bloques (GA/EGA) aporta un mecanismo distinto al de las metaheurísticas aplicadas principalmente al diseño de filtros o a la descomposición de señales [17, 19], extendiendo estas ideas al problema de estimación modal paramétrica.

La validación con datos reales (EEG VEPCON) confirmó que las mejoras obtenidas en simulación se transfieren al escenario experimental, manteniendo un desempeño superior sin requerir ajuste fino adicional específico para cada sujeto o condición. En conjunto, los resultados respaldan la viabilidad de los enfoques propuestos para señales con discontinuidades y para la identificación modal en datos ruidosos.

Desde el punto de vista teórico, estos resultados refuerzan la interpretación de los métodos clásicos de análisis espectral y paramétrico como problemas de optimización, en los que la elección de la función de costo, de las regularizaciones y de los operadores evolutivos permite controlar explícitamente el equilibrio entre ajuste global, comportamiento local y robustez al ruido. De este modo, se ofrece un marco unificado para extender técnicas tradicionales como las series de Fourier y los modelos basados en el método Prony mediante herramientas modernas de optimización.

En el plano práctico, los esquemas propuestos pueden integrarse como bloques de reconstrucción y estimación en cadenas de procesamiento de señales donde existan discontinuidades o componentes amortiguadas, por ejemplo en el análisis de transitorios eléctricos, la identificación modal de estructuras y el procesamiento de señales biomédicas (EEG/ECG). Esto abre la puerta a aplicaciones futuras en instrumentación y monitoreo avanzado, en las que se requiera preservar información fisiológica o estructural relevante aun en presencia de ruido y registros limitados.

Aun con estos avances, se tienen limitaciones inherentes: el costo computacional de los optimizadores poblacionales puede ser elevado si no se acotan generaciones o se emplean estrategias



de inicialización y paralelización; la sensibilidad a cotas e hiperparámetros requiere protocolos de configuración razonables; la selección del orden p sigue siendo crítica cuando existen modos muy próximos o señales cortas; y, en datos reales, la presencia de artefactos y no estacionariedad demanda preprocesamiento y pérdidas robustas para preservar estabilidad.

Trabajo futuro

- **Validación y certidumbre.** Ampliar la evaluación con más sujetos, condiciones y conjuntos de datos reales, integrando un preprocesamiento robusto y procedimientos de cuantificación de incertidumbre (bootstrap/ensambles), junto con criterios automáticos de selección de orden.
- **Optimización y eficiencia.** Explorar metaheurísticas y esquemas híbridos/multiobjetivo más avanzados (p. ej., CMA-ES, DE, PSO adaptativo, enfoques meméticos) y acelerar cómputo mediante paralelización en GPU, *warm-starts* y modelos sustitutos.
- **Generalización y despliegue.** Extender la aplicación a otras clases de señales (biomédicas, industriales y de potencia), formalizar *benchmarks* reproducibles y evaluar la viabilidad de implementación en entornos cercanos a tiempo real.



Referencias

- [1] D. Gottlieb and C.-W. Shu, “On the gibbs phenomenon and its resolution,” *SIAM Review*, vol. 39, no. 4, pp. 644–668, 1997.
- [2] Y. Hua and T. K. Sarkar, “Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 38, no. 5, pp. 814–824, 1990.
- [3] S. Van Huffel and J. Vandewalle, *The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis*, ser. Frontiers in Applied Mathematics. Philadelphia, PA: SIAM, 1991, vol. 9.
- [4] G. Plonka and M. Tasche, “Prony methods for recovery of structured functions,” *GAMM-Mitteilungen*, vol. 37, no. 2, pp. 239–258, 2014.
- [5] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
- [6] C. Jiang, P. Serrao, M. Liu, and C. Cho, “An enhanced genetic algorithm for parameter estimation of sinusoidal signals,” *Applied Sciences*, vol. 10, no. 15, p. 5110, 2020.
- [7] D. Pascucci, A. Hervais-Adelman, I. Abid, A. Amadon, R. Becker, and et al., “Source imaging of high-density visual evoked potentials with multi-scale brain parcellations and connectomes,” *Scientific Data*, vol. 9, no. 1, pp. 1–17, 2022.
- [8] A. J. Jerri, “The gibbs phenomenon in fourier analysis, splines and wavelet approximations,” *Mathematics Magazine*, vol. 50, no. 4, pp. 249–258, 1977.
- [9] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill, 1986.
- [10] A. A. Michelson, “Harmonic analyzer,” *American Journal of Science*, vol. 4, no. 5, pp. 1–13, 1898.
- [11] J. W. Gibbs, “Fourier’s series,” *Nature*, vol. 59, no. 1539, p. 606, 1899.
- [12] J. W. Cooley and J. W. Tukey, “An algorithm for the machine calculation of complex fourier series,” *Mathematics of computation*, vol. 19, no. 90, pp. 297–301, 1965.



- [13] A. F. Rodríguez, L. de Santiago Rodrigo, E. L. Guillén, J. M. R. Ascariz, J. M. M. Jiménez, and L. Boquete, “Coding prony’s method in MATLAB and applying it to biomedical signal filtering,” *BMC Bioinformatics*, vol. 19, p. 451, 2018.
- [14] J. Kennedy and R. Eberhart, “Particle swarm optimization,” in *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. 4. IEEE, 1995, pp. 1942–1948.
- [15] D. Izquierdo, M. C. L. de Silanes, and M. C. Parra, “Reduction of gibbs phenomenon for 1d rbf interpolation,” *Monografías Matemáticas García de Galdeano*, vol. 37, pp. 149–159, 2012.
- [16] A. K. Roonizi, “Fourier analysis: A new computing approach [lecture notes],” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 40, no. 1, pp. 183–191, 2023.
- [17] A. Kheirati Roonizi and R. Sassi, “Ecg signal decomposition using fourier analysis,” *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2024, no. 1, p. 79, 2024.
- [18] B. Beckermann, A. C. Matos, and F. Wielonsky, “Reduction of the gibbs phenomenon for smooth functions with jumps by the ε -algorithm,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 219, no. 2, pp. 329–349, 2008.
- [19] V. V. Thakare and R. K. Sahu, “A genetic algorithm for optimization of mse & ripples in linear phase low pass fir filter & also compare with cosine window techniques,” *International Journals Digital Communication and Analog Signals*, vol. 1, no. 1, pp. 9–15, 2015.
- [20] Y. Sun, P. Babu, and D. P. Palomar, “Majorization-Minimization Algorithms in Signal Processing, Communications, and Machine Learning,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, no. 3, pp. 794–816, Feb. 2017.
- [21] G. Spavieri, R. T. M. Ferreira, R. A. S. Fernandes, G. G. Lage, D. Barbosa, and M. Oleskovicz, “Particle swarm optimisation-based approach for parameterisation of power capacitor models fed by harmonic voltages,” *Applied Soft Computing*, vol. 56, pp. 55–64, 2017.
- [22] S. L. Marple Jr, *Digital spectral analysis*. Courier Dover Publications, 2019.



- [23] F. J. Harris, “On the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 66, no. 1, pp. 51–83, 1978.
- [24] A. H. Nuttall, “Some windows with very good sidelobe behavior,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 29, no. 1, pp. 84–91, 1981.
- [25] S. W. Smith, *The Scientist and Engineer’s Guide to Digital Signal Processing*, 2nd ed. San Diego, CA: California Technical Publishing, 1997.
- [26] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2010.
- [27] M. T. Heideman, D. H. Johnson, and C. S. Burrus, “Gauss and the history of the fast fourier transform,” *IEEE ASSP Magazine*, vol. 1, no. 4, pp. 14–21, 1984.
- [28] H. V. Sorensen, D. L. Jones, M. T. Heideman, and C. S. Burrus, “Real-valued fast fourier transform algorithms,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 35, no. 6, pp. 849–863, 1987.
- [29] C. M. Rader, “Discrete fourier transforms when the number of data samples is prime,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 56, no. 6, pp. 1107–1108, 1968.
- [30] L. I. Bluestein, “A linear filtering approach to the computation of the discrete fourier transform,” in *Northeast Electronics Research and Engineering Meeting Record*, vol. 10, 1968, pp. 218–219.
- [31] M. Frigo and S. G. Johnson, “The design and implementation of fftw3,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 93, no. 2, pp. 216–231, 2005.
- [32] A. Gelb and J. Tanner, “Robust reprojection methods for the resolution of the gibbs phenomenon,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 20, no. 1, pp. 3–25, 2006.
- [33] J. A. Cadzow, “Signal enhancement—a composite property mapping algorithm,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 36, no. 1, pp. 49–62, 1988.
- [34] I. Markovsky, *Low Rank Approximation: Algorithms, Implementation, Applications*, ser. Communications and Control Engineering. London: Springer, 2012.



- [35] P. C. Hansen, *Discrete Inverse Problems: Insight and Algorithms*, ser. Fundamentals of Algorithms. Philadelphia: SIAM, 2010.
- [36] D. R. Hunter and K. Lange, “A tutorial on mm algorithms,” *The American Statistician*, vol. 58, no. 1, pp. 30–37, 2004.
- [37] K. Lange, D. R. Hunter, and I. Yang, “Optimization transfer using surrogate objective functions,” in *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 9, no. 1, 2000, pp. 1–20.
- [38] P. L. Combettes and J.-C. Pesquet, “Proximal splitting methods in signal processing,” in *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*. New York: Springer, 2011, pp. 185–212.
- [39] T. Lipp and S. Boyd, “Variations and extension of the convex–concave procedure,” *Optimization and Engineering*, vol. 17, no. 2, pp. 263–287, 2016.
- [40] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, 2nd ed. Belmont, MA: Athena Scientific, 1999.
- [41] R. Varadhan and C. Roland, “Simple and globally convergent methods for accelerating the convergence of any em algorithm,” *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 35, no. 2, pp. 335–353, 2008.
- [42] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin, “Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 39, no. 1, pp. 1–38, 1977.
- [43] Z. Michalewicz, *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, 3rd ed. Springer, 1996.
- [44] J. E. Baker, “Reducing bias and inefficiency in the selection algorithm,” in *Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms*. Lawrence Erlbaum, 1987, pp. 14–21.
- [45] K. Deb and R. B. Agrawal, “Simulated binary crossover for continuous search space,” *Complex Systems*, vol. 9, no. 2, pp. 115–148, 1995.



- [46] L. J. Eshelman and J. D. Schaffer, “Real-coded genetic algorithms and interval-schemata,” in *Foundations of Genetic Algorithms 2*. Morgan Kaufmann, 1993, pp. 187–202.
- [47] K. Deb, “An efficient constraint handling method for genetic algorithms,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 186, no. 2–4, pp. 311–338, 2000.
- [48] J. Kennedy, R. C. Eberhart, and Y. Shi, *Swarm Intelligence*. Morgan Kaufmann, 2001.
- [49] Y. Shi and R. Eberhart, “A modified particle swarm optimizer,” in *IEEE International Conference on Evolutionary Computation*. IEEE, 1998, pp. 69–73.
- [50] M. Clerc and J. Kennedy, “The particle swarm—explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space,” *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 6, no. 1, pp. 58–73, 2002.
- [51] I. C. Trelea, “The particle swarm optimization algorithm: Convergence analysis and parameter selection,” *Information Processing Letters*, vol. 85, no. 6, pp. 317–325, 2003.
- [52] D. Pascucci, S. Tourbier, J. Rue-Queralt, M. Carboni, P. Hagmann, and G. Plomp, “Vepcon: Source imaging of high-density visual evoked potentials with multi-scale brain parcellations and connectomes,” 2022.