UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIHUAHUA

FACULTAD DE ZOOTECNIA Y ECOLOGÍA

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

PROGRAMACIÓN LINEAL ESTOCÁSTICA:

TÉCNICA DE PROGRAMACIÓN CON RESTRICCIONES ALEATORIAS

POR:

WILLIAM RÍOS ORTIZ

TESINA PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO PROFESIONAL EN ESTADÍSTICA APLICADA

CHIHUAHUA, CHIH., MÉXICO JUNIO DE 2025

Programación lineal estocástica: Técnica de programación con restricciones aleatorias. Tesina de maestría presentada por William Ríos Ortiz como requisito para obtener el grado de Maestro Profesional en Estadística Aplicada, ha sido aprobado y aceptada por:

D. Ph. Alfredo Pinedo Álvarez
Director de la Facultad de Zootecnia y Ecología

Dra. Rosalía Sánchez Basualdo
Secretaria de Investigación y Posgrado

Dr. Lauro Manuel Espino Enríquez
Coordinador Académico

Dr. José Antonio Díaz García
Presidente del comité

29 septiembre 2025

Fecha

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIHUAHUA

Fecha: 24 DE JUNIO DE 2025

Después de haber reunido la revisión final del trabajo de tesina a nivel Maestría, bajo el nombre: PROGRAMACIÓN LINEAL ESTOCÁSTICA: TÉCNICA DE PROGRAMACIÓN CON RESTRICCIONES ALEATORIAS

Elaborado por: William Ríos Ortiz

Los integrantes del comité están de acuerdo en que dicho trabajo satisface los requisitos para su publicación (indicándolo con una "X"), desde el punto de vista de:

Puesto en comité	Nombre y firma	Contenido Técnico	Análisis de la Información	Formato (estilo y forma)
Asesor:	DR. JOSÉ ANTONIO DÍAZ GARCÍA	X	X	X
Representante área relacionada:	Dr. Francisco J. Caro Lopera	X	X	X
Representante área estadística:	D.PH. PABLO FIDEL MANCILLAS FLORES	X	X	X
Representante de la coordinación:	DR. GUADALUPE NELSON AGUILAR PALMA	✓	✓	✓

Dr. Lauro Manuel Espino Enríquez
Unidad/Coordinación Académica
Vo. Bo.

FACULTAD DE ZOOTECNIA Y ECOLOGÍA
Periférico Francisco R. Almada [illegible]
C.P. 31453 Chihuahua, Chih.
Tel. [illegible]
www.[illegible]

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todos los profesores que me acompañaron a lo largo de estos tres años de formación. Su apoyo, enseñanzas y dedicación no solo me permitieron continuar aprendiendo, sino también revivir con entusiasmo mis momentos universitarios. Gracias a ellos, pude desarrollar una visión más amplia y profunda en mi área de estudio.

De igual manera, extiendo mi agradecimiento a los miembros de mi comité, cuya orientación y colaboración fueron fundamentales en la elaboración y estructuración de esta tesina. Su experiencia, compromiso y paciencia resultaron claves para la culminación de este proyecto. En especial, al Dr. Díaz, por brindarme su apoyo incondicional desde el inicio de este proceso y por acompañarme en cada etapa con generosidad y disposición.

A mi familia, por su amor incondicional y por estar siempre a mi lado en cada momento de este camino. Gracias por inculcarme los valores que me han guiado a lo largo de mi vida, por ser mi fuente constante de inspiración y por enseñarme a no rendirme frente a las adversidades. Este logro también les pertenece.

DEDICATORIA

A mi familia y a DIOS.

CURRICULUM VITAE

El autor nació el 17 de abril de 1996 en la Ciudad Chihuahua, Chihuahua, México

2016-2021	Estudios de Ingeniería Aeroespacial en la Universidad Autónoma de Chihuahua. Cd Chihuahua, Chih.
2019-2020	Intercambio académico, Ingeniería Industrial en École des Mines Albi, Francia.
Enero, 2022 - Septiembre, 2024	Production Scheduler en SMTC Corporation. Cd Chihuahua, Chih.
Agosto, 2022 - Junio, 2025	Estudios de maestría en Estadística Aplicada en la Universidad Autónoma de Chihuahua. Cd Chihuahua, Chih.
Sept 2024 - A la fecha	Production Scheduler III en Copeland Corporation. Cd Chihuahua, Chih.

RESUMEN

PROGRAMACIÓN LINEAL ESTOCÁSTICA:

TÉCNICA DE PROGRAMACIÓN CON RESTRICCIONES ALEATORIAS

POR:

WILLIAM RÍOS ORTIZ

Maestría Profesional en Estadística Aplicada

Secretaria de Investigación

Facultad de Zootecnia y Ecología

Universidad Autónoma de Chihuahua

Director Dr. José Antonio Díaz García

La teoría estadística juega un papel fundamental en una gran variedad de áreas del conocimiento, tanto en el análisis de problemas teóricos, como en la toma de decisiones dentro de las ciencias experimentales. En particular, su aplicación en la formulación de modelos bajo ciertas condiciones de incertidumbre se ha extendido a problemas de programación matemática, dando lugar al desarrollo de una nueva área dentro este campo y de la investigación de operaciones, conocida como programación estocástica. Dentro de este enfoque, la incertidumbre se manifiesta con frecuencia en problemas de programación lineal, lo que ha originado una subárea específica conocida como programación lineal estocástica. Uno de los enfoques desarrollados bajo la teoría estadística en la solución de estos problemas de programación lineal estocástica es conocida ***como técnica de programación con restricciones aleatorias***. En esta tesina se presenta en detalle dicha técnica desarrollada para los cuatro casos de problemas clásicos de programación lineal estocástica. Todos estos casos son

ejemplificados a través de problemas de programación prácticos y sus correspondientes soluciones numéricas se obtuvieron usando un programa comercial de optimización.

ABSTRACT

STOCHASTIC LINEAR PROGRAMMING

CHANCE CONSTRAINED PROGRAMMING TECHNIQUE

BY:

WILLIAM RÍOS ORTIZ

Statistical theory plays a fundamental role in a wide range of areas of knowledge, both in the analysis of theoretical problems and in decision-making within the experimental sciences. In particular, its application in the formulation of models under certain conditions of uncertainty has extended to mathematical programming problems, leading to the development of a new area within this field and operations research, known as stochastic programming. Within this framework, uncertainty frequently arises in linear programming problems, giving rise to a specialized subarea known as stochastic linear programming. One of the approaches developed under this perspective to address stochastic linear programming problems is known as the **chance-constrained programming technique**. This thesis presents a detailed study of this technique, applied to the four classical cases of stochastic linear programming problems. Each of these cases is illustrated through practical programming problems, and their corresponding numerical solutions were obtained using the commercial optimization software.

CONTENIDO

LISTA DE CUADROS

INTRODUCCIÓN

Los métodos de **programación estocástica** (también denominada **optimización probabilística, optimización estadística, optimización bajo incertidumbre u optimización bajo riesgo o alternativamente sustituyendo optimización por programación**), son técnicas que permiten optimizar (maximizar o minimizar) funciones objetivo que describen el comportamiento de ciertos problemas bajo condiciones de incertidumbre. En los últimos años estas técnicas se han empleado en el modelado y solución de problemas de programación en diversos campos del conocimiento como en la ingeniería, los negocios, la informática y en la estadística como herramientas esenciales. Los expertos del área han logrado un número significativo de desarrollos teóricos y algorítmicos, cuyos resultados aparecen descritos en detalle en los libros de texto clásicos de Birge y Louveaux (2011) y Shapiro *et al*. (2014). Con los crecientes avances tanto teóricos, algorítmicos y computacionales, la programación estocástica se ha aplicado cada vez más a un extenso espectro de problemas particulares de gran interés, como son la planificación financiera, la generación de electricidad, la gestión de la cadena de suministro, la mitigación del cambio climático y el control de la contaminación, entre muchos otros.

El origen de la programación estocástica se remonta a la década de 1950 cuando George B. Dantzig, reconocido como el padre del algoritmo simplex para programación lineal, escribió el artículo seminal “Programación lineal bajo incertidumbre” (del inglés, “Linear programming under uncertainty”, Dantzig 1955). En este artículo precursor, Dantzig describió una de las bases para desarrollar el procedimiento del modelado de la programación estocástica como “incluir el caso de demandas inciertas para el problema de la asignación óptima de una flota de transportistas a rutas de aerolíneas para satisfacer una distribución de demanda anticipada”. Otro artículo fundamental sobre programación estocástica se puede encontrar en Beale (1955). En lo sucesivo, la programación estocástica se convirtió en un campo importante de investigación para los expertos de la programación matemática y la investigación de operaciones. Las condiciones de incertidumbre se presentan en el modelado de una gran variedad de sistemas, esto es en la propia especificación del sistema en estudio o como perturbaciones. Ejemplos de características de interés a ser modeladas a través de un problema de programación estocástica se pueden citar: la demanda eléctrica de una red, el flujo de agua en un sistema de riego, la cantidad de personas que ocupan una habitación en un hotel, entre otros ejemplos. En concreto, la programación estocástica busca generar una solución a un problema de programación matemática donde las variables de decisión o los parámetros de forma del modelo son variables aleatorias.

En general en un problema de programación matemática y en particular de programación estocástica se deben considerar los siguientes elementos en el problema planteado:

- Una serie de decisiones que hay que tomar; representadas en el problema de programación estocástica a través de las variables de decisión.
- Una serie de condiciones bajo las cuales hay que determinar la solución factible; condiciones modeladas a través de una serie de restricciones.

- Un criterio a optimizar; representado en el problema de programación estocástica a través de la función objetivo.

Una solución al problema de programación estocástica se dice factible cuando satisface todas las restricciones, pero cuando las restricciones son modeladas bajo incertidumbre, no se puede considerar estrictamente la factibilidad, en su defecto se habla de la probabilidad de que una solución determinada sea factible. La función objetivo se puede establecer como su esperanza o su valor esperado. Una forma de abordar este problema es reducir el riesgo en la toma de decisión considerando el peor escenario, pero tomando en cuenta que bajo este peor escenario la decisión tomada es muy conservadora; afortunadamente con los avances en los algoritmos y métodos computacionales se pueden explorar a la vez, diferentes soluciones factibles bajo distintos escenarios de incertidumbre, logrando así obtener una solución robusta sin sacrificar el rendimiento de la solución.

En particular, las técnicas de programación estocástica tienen una amplia variedad de aplicaciones en problemas estadísticos. Muchos problemas de optimización, especialmente dentro del contexto de la teoría estadística, han sido resueltos de manera inapropiada al tratarse como problemas de **optimización determinística**, cuando en realidad su naturaleza es de carácter probabilístico o estocástico. Prékopa (1978, 1995) ha estudiado varios de estos problemas y los ha replanteado y resuelto como problemas de **optimización estocástica**. En particular, Díaz-García *et al.* (2005) y Hejazi *et al.* (2012) abordan el problema de la optimización de superficies de respuesta como un problema de optimización estocástica en los casos univariado y multivariado, respectivamente.

Similarmente, Díaz-García y Garay-Tapia (2007) proponen soluciones al problema de la asignación óptima en el muestreo estratificado univariado a través de técnicas de optimización estocástica, Díaz-García y Ulloa (2008) y Díaz-García y Ramos-Quiroga (2012, 2014) estudian el problema de asignación óptima en el muestreo estratificado multivariado empleando diferentes técnicas de la programación estocástica multiobjetivo.

Esta memoria presenta un estudio detallado de la **técnica de programación estocástica con restricciones aleatorias** (del inglés "Chance contrained programming technique") desarrollada por Charnes y Cooper (1959 y 1963). Cada posible caso de esta técnica se describe resolviendo un problema con fines didácticos obteniendo su solución numérica a través del programa de optimización computacional LINGO (2019).

PRELIMINARES

En este capítulo se hace una recopilación de los elementos matemáticos y estadísticos básicos para el desarrollo de la presente tesina (Muirhead, 2005). En particular, se resume la notación a ser utilizada, definición y propiedades básicas de la distribución normal multivariada y finalmente una breve descripción sobre la programación lineal determinística.

Notación

Las *matrices* serán denotadas por letras mayúsculas en negritas $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \ldots, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Theta}, \ldots$, si $\boldsymbol{A}$ es una matriz con m filas y n columnas este hecho se escribirá como $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{mxn}$. En particular si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{mx1}$, **A** define un *vector* y serán denotados por letras minúsculas negritas, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$. El ij –ésimo elemento de $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{mxn}$, será denotado como $a_{ij} \in \mathbb{R}$, donde i define la fila y j la columna. En general las matrices se denotarán en términos de sus elementos a_{ij}, columnas $\boldsymbol{a_j} \in \mathbb{R}^m$ o filas $\boldsymbol{a_{(i)}} \in \mathbb{R}^n$, esto es:

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{mxn}$, entonces:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a'}_{(1)} \\ \boldsymbol{a'}_{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a'}_{(m)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a_j} \varepsilon \mathbb{R}^m \;\; y \;\; \boldsymbol{a_{(i)}} \varepsilon \mathbb{R}^n. \tag{1. 1}$$

Aquí $\boldsymbol{a}_i'$ denota la *transpuesta* de $\boldsymbol{a_i}$, esto es si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{mxn}$, entonces $\boldsymbol{A}' \in \mathbb{R}^{nxm}$ se obtiene intercambiando las filas por columnas o viceversa en la matriz $\boldsymbol{A}$ y define la transpuesta de una matriz. Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz cuadrada $(m = n)$, es decir, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$y si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$ se dice que $\boldsymbol{A}$ es una *matriz simétrica*. Por otro lado si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' \in \mathbb{R}^{nxn}$ y $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} > 0$ para todo $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$, se dice que $\boldsymbol{A}$ es una matriz *definida positiva*, denotando $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{0}$, donde $\boldsymbol{0} = (0) \in \mathbb{R}^{nxn}$ denota una matriz con sólo 0 (ceros) en todos sus elementos. Sea $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{mxm}$ matriz tal que $d_{ij} = 0$ para todo $i \neq j, i, j = 1,2, \dots, m$. $\boldsymbol{D}$ es llamada matriz *diagonal* y se denotara como:

$$\boldsymbol{D} = diag(d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1m}) = diag\left(d_{1,}d_2, \dots, d_m\right) = diag(d_i). \tag{1. 2}$$

En particular si $d_{ii} = 1$ para todo $i = 1,2, \dots, m$, $\boldsymbol{D}$ es denotada como $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I_m}$ y es llamada *matriz identidad*.

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$, su *determinante* se denotará como $|\boldsymbol{A}|$. Si $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ se dice que $\boldsymbol{A}$ es una *matriz no singular* o en su defecto se dice que $\boldsymbol{A}$ es una *matriz singular*. Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$ es una matriz no singular, $\boldsymbol{A}^{-1} \in \mathbb{R}^{nxn}$, denota el *inverso* de $\boldsymbol{A}$ esto es, $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I_n}$.

Distribución Normal Multivariada y Distribuciones Relacionadas

En esta sección se presenta un breve resumen sobre la distribución normal multivariada. Pero antes se presentará un resumen sobre los momentos de un vector aleatorio (Muirhead, 2005).

Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ un *vector aleatorio* (i.e. x_i es una variable aleatoria, $i = 1,2, \dots, m$) su *media, esperanza o valor medio* se define como:

$$E(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \\ \vdots \\ E(x_m) \end{pmatrix}. \tag{1. 3}$$

Más aún, es fácil ver que si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{sxm}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{s}$, son una matriz y un vector de constantes, respectivamente, entonces:

$$E(\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{A}\, E(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}.$$

(1. 4)

Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{m}$ tiene esperanza $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{m}$, la *matriz de covarianzas* (también llamada *matriz de varianzas-covarianzas*) del vector aleatorio $\boldsymbol{x}$ se define como la matriz simétrica $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{mxm}$ tal que:

$$\boldsymbol{\Sigma} = Cov(\boldsymbol{x}) = E(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'.$$

(1. 5)

El ij-ésimo elemento de la matriz de covarianzas $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{\boldsymbol{ij}}), i, j = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, m,$ es **:**

$$\sigma_{\boldsymbol{ij}} = \begin{cases} \boldsymbol{E}\left[(\boldsymbol{x_i} - \mu_{\boldsymbol{i}})(x_{\boldsymbol{j}} - \mu_{\boldsymbol{j}})\right], i \neq j \\ \boldsymbol{E}[(x_{\boldsymbol{i}} - \mu_{\boldsymbol{i}})^{\mathbf{2}}], i = j\ . \end{cases}$$

(1. 6)

Para fines del presente trabajo, se asumirá que $\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$, es decir $\boldsymbol{\Sigma}$ es una matriz definida positiva.

Definición 1.1. Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{m}$ es un vector aleatorio, se dice que tiene una *distribución normal multivariada* si para todo $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{m}$ constante, se tiene que $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{x}$ tiene una distribución normal univariada.

Recuerde que:

Definición 1.2. Se dice que $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}$ variable aleatoria, sigue una *distribución normal univariada* de media $\mu \in \mathbb{R}$ y varianza $\sigma^2 > 0$, denotando $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si su densidad admite la expresión:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

(1. 7)

Además, observe que si $X = \mu + \sigma Z$, la distribución de Z es llamada *distribución normal estándar (o tipificada)*. Más aún, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, esto es $E(Z) = 0$ y $Var(Z) = 1$ y su densidad es:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}. \tag{1. 8}$$

Luego la *función de distribución* de Z denotada como $\Phi(z)$ se define como

$$P(Z \leq z) = F_Z(z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \ . \tag{1. 9}$$

Recuerde que, en general, la función de distribución $F(\cdot)$ es una *función monótona no decreciente*, es decir si $x \leq y$, implica que $F(x) \leq F(y)$.

Además, observe que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \tag{1. 10}$$

Similarmente,

Definición 1.3. Se dice que $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ aleatorio tiene una *distribución normal m-dimensional* con $E(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mu}$ y $Cov(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Sigma} > 0$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{mxm}$, $\boldsymbol{\Sigma} > 0$, si su función de densidad es

$$f_x(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})} \ . \tag{1. 11}$$

Se denotará este hecho escribiendo $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Observe que si $\boldsymbol{\Sigma} = diag(\sigma_{ii}),\ i = 1,2, \dots, m$, se tiene que

$$f_x(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\prod_{i=1}^{m}\sqrt{\sigma_{ii}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_{ii}}} \quad . \tag{1. 12}$$

Teorema 1.1. Suponga $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ y que $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{rxm}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{r}$ entonces

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b} \sim N_r(\boldsymbol{A\mu} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A\Sigma A}'). \tag{1. 13}$$

Teorema 1.2. Si $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_N$ es una muestra de vectores aleatorios tales que $\boldsymbol{x}_i \sim \mathcal{N}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), N \geq m,$ entonces los estimadores máximos verosímiles insesgados de $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ son

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i = \overline{\boldsymbol{x}} \tag{1. 14}$$

y

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{S} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})' \,. \tag{1. 15}$$

Más aún, $\overline{\boldsymbol{x}} \sim \mathcal{N}_m\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{N}\boldsymbol{\Sigma}\right)$ y $\mathbf{S} \sim \mathcal{W}_m\left(N-1, \frac{1}{N-1}\boldsymbol{\Sigma}\right)$, donde $\mathcal{W}_m(p, \boldsymbol{\Sigma})$ denota una distribución *Wishart m-dimensional* con p grados de libertad y parámetro $\boldsymbol{\Sigma}$.

Programación Lineal

La programación lineal es uno de los métodos de la programación matemática cuyo objetivo es dar solución a los problemas que consisten de una función objetivo y restricciones definidas a través de funciones lineales en términos de las variables de decisión. Dichas expresiones que describen las restricciones en un problema de programación lineal son establecidas como igualdades o desigualdades. El método tradicionalmente empleado en la solución de problemas de programación lineal es el método simplex (Grass, 2003 o Venderbei, 2008).

Historia

La solución de un sistema lineal de inecuaciones se origina, al menos, en los trabajos de Joseph Fourier. Posteriormente, surge el método de eliminación de Fourier-Motzkin. El tipo de problema de optimización de programación lineal fue reconocido por primera vez en la década de 1930 por los economistas mientras desarrollaban métodos para la asignación óptima de recursos. Durante la Segunda Guerra Mundial, la Fuerza Aérea de los Estados Unidos buscó procedimientos más efectivos para asignar recursos y recurrió a la programación lineal. George B. Dantzig, miembro del grupo de la Fuerza Aérea, formuló el problema general de programación lineal y derivó el método simplex de solución en 1947. John Von Neumann, desarrollo la **teoría de la dualidad** en el mismo año. Posteriormente las contribuciones teóricas de Kuhn y Tucker logran un gran impacto en el desarrollo de la teoría de la dualidad en la programación lineal. Un destacado ingeniero y matemático ruso, Leonid Vitalievich Kantorovich, previo a los trabajos de Dantzig, propuso en 1939 una teoría y el desarrollo de **técnicas para la asignación óptima de los recursos** en el campo de la economía, considerándolo por ello como uno de los fundadores de la programación lineal, obteniendo con ello el reconocimiento del premio Novel en economía en 1975. Leonid Genrikhovich Khachiyan ganador del Premio Fulkerson en 1982, fue otro matemático ruso quien en 1979 propuso el **método del algoritmo del elipsoide**, a partir del cual probó que el problema de la programación lineal siempre puede ser calculado en tiempo polinomial. Posteriormente, un matemático hindú, Narendra Krishna Karmarkar, en 1984 cuando trabajaba para los Laboratorios Bell, propone el **método de Karmarkar**, un nuevo método de punto interior que permite resolver un problema de programación lineal en tiempo polinomial.

La programación lineal permite encontrar la solución óptima de problemas que tienen un gran número de posibles soluciones factibles. Este es el caso del problema de asignación de 70 lugares de trabajo a 70 empleados, estudiado por Dantzig. Como él lo señala, el número de posibles soluciones factibles a ser analizadas es mayor al número de partículas presentes en el universo, ¡exactamente 70! (setenta factoriales). La programación lineal a través del método simplex es capaz de encontrar la solución óptima en unos cuantos pasos (Grass,2003 y Vanderbei, 2008). Véase el Cuadro 1 para una síntesis de los datos presentados.

Cuadro 1*:* Evolución de la programación lineal.

Año	Evento
1826	Joseph Fourier anticipa la programación lineal. Carl Friedrich Gauss resuelve ecuaciones lineales por eliminación "*gaussiana*".
1902	Gyula Farkas concibe un método para resolver sistemas de inecuaciones.
1947	George Dantzig publica el algoritmo simplex y John von Neumann desarrolló la teoría de la dualidad. Se sabe que Leonid Kantoróvich también formuló la teoría en forma independiente.
1984	Narendra Karmarkar introduce el método del *punto interior* para resolver problemas de programación lineal.

Fuente: https://inveoperaciones.wordpress.com/2012/05/07/historia-de-la-programacion-lineal/

Elementos en un Problema de Programación Lineal

Un problema de programación lineal considera los siguientes componentes:

- *Variables de decisión*: son las variables $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ que deciden la salida del problema de programación lineal y representan la solución final.

Función objetivo: generalmente representada por $z(\boldsymbol{x})$, es la función lineal a ser optimizada de acuerdo con la condición dada para obtener la solución final.

- *Restricciones*: limitaciones o restricciones descritas a través de funciones lineales que las variables de decisión deben de cumplir.
- *Restricciones de no negatividad*: en algunos escenarios del mundo real, las variables de decisión no pueden ser negativas.

Tipos de Problemas de Programación Lineal:

El número de aplicaciones de la programación línea ha sido tan grande que no sería posible describirlas. Solo algunas de las primeras aplicaciones son mencionadas a continuación:

1. Problemas de fabricación.

La primera y más fructífera aplicación industrial de la programación lineal se ha realizado en las refinerías de petróleo. En general, una refinería puede adquirir petróleo crudo de diversas fuentes, con distintas composiciones y precios. Puede fabricar diferentes productos, como combustible de aviación, combustible de gasóleo y gasolina, en cantidades variables. Las limitaciones pueden deberse a la cantidad de petróleo crudo disponible de una fuente específica, la capacidad de la refinería para producir un producto específico, etc.

Se busca una combinación del petróleo crudo adquirido y los productos manufacturados que genere la máxima rentabilidad.

2. Problemas de la industria del metal.

En la industria del hierro y el acero, la programación lineal se utilizaba para decidir los tipos de productos que se debían fabricar en sus trenes de laminación para maximizar las ganancias.

3.Problemas de la Industria metalúrgica.

Las industrias metalúrgicas utilizan programación lineal para la carga del taller y para determinar la elección entre producir o comprar una pieza.

4. Problemas de transporte

En la industria de procesamiento de alimentos, se ha utilizado la programación lineal para determinar el plan de envío óptimo para la distribución de un producto particular desde las diferentes plantas de fabricación a los distintos almacenes.

Planteamiento General de un Problema de Programación Lineal

El planteamiento general de un problema de programación lineal es:

$$\underset{x}{\text{Optimizar}}\ \mathrm{z} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeto a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n.$$

Alternativamente

$$\underset{x}{\text{Optimizar}}\ \mathrm{z} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$Sujeto\ a:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_{i,} \quad i = 1,2, \dots, m.$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n,$$

O matricialmente como:

$$\underset{x}{\text{Optimizar}}\ \mathrm{z} = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$$

$$Sujeto\ a:$$

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},$$

donde, $z \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{nxm}$ y $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, denota $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, (Grass, 2003 y Vanderbei, 2008).

PROGRAMACIÓN LINEAL ESTOCÁSTICA

La **programación estocástica** se ocupa de situaciones en las que algunos o todos los parámetros del problema de programación matemática se describen mediante variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conocidas en lugar de cantidades deterministas. El propósito de la **programación estocástica** es encontrar el óptimo de un problema de programación bajo ciertos criterios elegidos por el experto en la toma decisiones que considere convenientemente la aleatoriedad de los parámetros del problema. Dado que diversas decisiones del mundo real toman en cuenta la aleatoriedad, la programación estocástica es una herramienta fundamental en una amplia variedad de áreas del conocimiento como las finanzas, el transporte, optimización energética, ingeniería, etc. (Stancu-Minasian, 1984; Uryasev y Pardalos, 2001; Birge y Louveaux, 2011; *Shapiro et al*. 2014).

A diferencia de la programación lineal clásica donde las variables de decisión son determinísticas y los parámetros de forma se conocen con veracidad, en la programación lineal estocástica estas condiciones son atenuada, esto es, no se conocen los valores, sólo sus distribuciones probabilísticas o su conjetura a cerca de ellas.

El carácter aleatorio en un problema de programación lineal se puede presentar por varias razones, a saber: los parámetros del modelo son desconocidos y en su defecto son reemplazados por estimaciones de los mismos, las variables de decisión por definición son variables aleatorias, y posibles errores en la cuantificación de los parámetros de forma, entre muchos otros motivos.

El nacimiento conocido de la programación estocástica fue en 1955, propuesta como una generalización de la programación lineal con el objetivo de dar solución a problemas con un gran número de variables y parámetros, (Beale, 1955; Dantzig, 1955). Los métodos de descomposición también conocidos como programación matemática a gran escala fueron introducidos con el propósito de resolver problemas de programación de sistemas con estructuras especiales (Benders, 1962; Datzing, 1963; Van Slyke y Wets, 1969; Ramos y Cerisela, 2005).

Aún cuando por más de 60 años los elementos básicos de la programación estocástica eran conocidos, no fue sino hasta después de los avances teóricos de la optimización y en las ciencias computacionales que devolvió el interés en la programación estocástica, permitiendo resolver problemas de gran tamaño.

Dentro del campo de la estadística y la probabilidad, la optimización estocástica se ha empleado desde hace tiempo como una herramienta clave para la formulación y resolución de problema; importantes problemas en el contexto de la estadística matemática tales como lograr definir regiones de confianza, regiones de tolerancia con aplicaciones en procesos estocásticos, muestreo multivariado y problemas a cerca de pruebas de hipótesis, entre muchos otros, fueron replanteados como problemas de programación estocástica por Prékopa (1978.

Formalmente, un problema *de programación matemática definido como:*

$$\min_{\boldsymbol{x}} h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_0)$$

$$g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_1) \leq 0$$

$$g_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_2) \leq 0$$

$$\vdots$$

$$g_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_m) \leq 0$$

$$x_j \geq 0\,, \quad j = 1, \dots, n.$$

donde $h(\cdot)$ es la función objetivo (comúnmente llamada **función de costos** en otros contextos), $g_i(.)$, $i = 1, \dots, m$ denotan las restricciones; $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ (**variables de decisión**), y $\boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{R}^k$(**parámetros de forma**), $i = 0,1, \dots, m$. Entonces si $\boldsymbol{x}$ y/o $\boldsymbol{\xi}_i$ son de carácter aleatorio al menos para algún i, este problema define un ***problema de programación estocástica***.

Esencialmente, ***existen dos enfoques*** para resolver un problema de programación estocástica. El primero de ellos consiste en extender los métodos de la programación matemática al caso estocástico. Algunos ejemplos de este enfoque son: el **método de la proyección del subgradiente** del autor Naum Z. Shor, la **técnica de direcciones factibles concebida** por Andrzej Piotr Ruszczyński, el **método de relajación lagrangiana** de Arthur Geoffrion y el **procedimiento min-max** propuesto por Jitka Dupačová, por mencionar algunas (Prékopa, 1995; Ramos y Cerisela, 2005; Birge y Louveaux, 2011; Shapiro et al., 2014). El segundo enfoque, consiste de los métodos basados en ideas estadísticas y probabilísticas que abordan el problema estocástico a través de su planteamiento como un problema determinístico equivalente. Específicamente, **se dice que estos dos problemas son equivalentes en el sentido de que la solución del nuevo problema de programación (lineal o no lineal) determinístico es una solución del problema de programación estocástico**

original. Algunos de los métodos que fueron desarrollados bajo esta visión son: el E-Modelo, V-Modelo y P-Modelo (Charnes y Cooper, 1963; Prékopa, 1995; Ramos y Cerisela, 2005, entre otros autores). Es obvio que este es un tema que consta de un gran número de técnicas de programación, y sería muy complicado intentar abordarlo la totalidad de los métodos. Una vez transformado el problema de programación estocástica en un problema de programación (lineal o no lineal) determinístico, este puede ser resuelto mediante cualquiera de los métodos de programación matemática determinística conocidos, tales como, programación lineal, geométrica, dinámica, no lineal, de enteros, etc.

El principal objetivo en el presente manuscrito será estudiar el problema de programación lineal estocástica bajo el enfoque propuesto por Charnes y Cooper (1959), llamado, ***técnica de programación con restricciones aleatorias*** (del inglés ***Chance Constrained Programming Techique***).

En general, el problema de programación con restricciones aleatorias a resolver es de la forma:

$$\min_{\boldsymbol{x}} h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_0)$$

$$Sujeto\ a:$$

$$P[g_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_i) \leq 0] = 1 - \alpha, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde $P(\cdot)$ denota la probabilidad y $\alpha \in (0,1)$. Específicamente en nuestro caso tanto la función $h(\cdot)$ como las restricciones $g_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, m$, son funciones lineales en $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ y en $\boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, \dots, m$, respectivamente.

La técnica de programación con restricciones aleatorias es usada para resolver problemas de programación que involucran restricciones aleatorias, esto es, restricciones que pueden ser violadas con cierta probabilidad. En particular, en la programación con restricciones aleatorias, el problema de programación lineal estocástico se define como:

$$\min_{\boldsymbol{x}} h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \tag{2. 1}$$

$$sujeto\ a:$$

$$P(\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} \le b_i) \ge 1 - \alpha_i, \qquad i = 1,2,\dots,m \tag{2. 2}$$

$$x_j \ge 0\,, \qquad j = 1,2,\dots,n, \tag{2. 3}$$

donde, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n\ y\ \alpha_i \in (0,1), i = 1,\dots m,$ con:

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad \boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,$$

$i = 1,\dots,m.$ Además, c_j, a_{ij}, b_i son variables aleatorias y α_i son probabilidades especificadas. Observando que en (2.1), indica que la j-ésima restricción:

$$\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} < b_i, \qquad i = 1,2,\dots,m,$$

se tiene que satisfacer con una probabilidad de al menos $1 - \alpha_i$ donde $\alpha_i \in (0,1)$. Con los fines del presente manuscrito se asumirá que las variables de decisión x_i son consideradas determinísticas.

Técnica de Programación con Restricciones Aleatorias.

A continuación, se estudiarán los casos especiales en donde sólo $c_j\ o\ a_{ij}\ o\ b_i$, $i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n,$ son variables aleatorias y finalmente se estudiará el caso general en el cual c_j, a_{ij}, b_i , $i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n,$ son todas variables aleatorias. Para tal efecto se asumira que todas las variables aleatorias sigues una distribución normal, más aún:

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{i1} \\ \mathrm{a}_{i2} \\ \vdots \\ \mathrm{a}_{in} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_n(\overline{\boldsymbol{a}}_i, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{a}_i}), \qquad i = 1,2,\ldots,m.$$

(2. 4)

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_m(\overline{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{b}}),$$

(2. 5)

y

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{c}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{c}_n \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_n(\overline{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{c}}),$$

(2. 6)

donde $\overline{\boldsymbol{a}}_i, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{a}_i}$ son conocidas para todo $i = 1,2,\ldots,m$, igualmente, $\overline{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{c}}\ y\ \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{c}}$ son también conocidas.

Caso I. $\boldsymbol{a_i} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ ***son aleatorios,*** $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1},\ldots,\boldsymbol{m}$. Defina:

$$d_i = \boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x}, \qquad i = 1,2,\ldots,m.$$

(2. 7)

Luego por (2.4):

$$d_i \sim \mathcal{N}(\overline{\boldsymbol{a}}_i\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{a}_i}\boldsymbol{x}) \equiv \mathcal{N}\left(\bar{d}_{i,} Var(d_i)\right), \quad i = 1,2,\ldots,m.$$

(2. 8)

De donde la restricción (2.2) se puede escribir como:

$$P(\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} \le b_i) = P(d_i \le b) \ge 1 - \alpha_i, \;\; i = 1,2, \dots, m,$$

(2. 9)

esto es:

$$P\left(\frac{d_i - \bar{d}_i}{\sqrt{Var(d_\mathrm{i})}} \le \frac{b_i - \bar{d}_i}{\sqrt{Var(d_\mathrm{i})}}\right) \ge 1 - \alpha_i, \;\; i = 1,2, \dots, m.$$

(2. 10)

Luego:

$$\frac{d_i - \bar{d}_i}{\sqrt{Var(d_\mathrm{i})}} \sim N(0,1), \qquad i = 1,2, \dots, m,$$

(2. 11)

por lo tanto:

$$P(d_i \le b_i) = \Phi\left(\frac{b_i - \bar{d}_i}{\sqrt{Var(d_\mathrm{i})}}\right), \qquad i = 1,2, \dots, m.$$

(2. 12)

Donde, recuerde que $\Phi(z)$ denota la función de distribución de una función normal estándar evaluada en z. Sea ε_i tal que:

$$\Phi(\varepsilon_i) = 1 - \alpha_i \, , \qquad i = 1,2, \dots, m.$$

(2. 13)

Entonces (2.10) se puede escribir como:

$$\Phi\left(\frac{b_i - \bar{d}_i}{\sqrt{Var(d_\mathrm{i})}}\right) \ge \Phi(\varepsilon_i), \;\; i = 1,2, \dots, m,$$

(2. 14)

y como consecuencia de la monotonía de $\Phi(z)$, (2.14) es cierto si y sólo si

$$\frac{b_i - \bar{d}_i}{\sqrt{Var(d_i)}} \geq \varepsilon_i, \;\; i = 1,2,\dots,m,$$

(2. 15)

o equivalentemente:

$$\bar{d}_i + \varepsilon_i \sqrt{Var(d_i)} - \; b_i \; \leq 0, \;\; i = 1,2,\dots,m.$$

(2. 16)

De donde por (2.7) y (2.8) se obtiene:

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}'\boldsymbol{x} + \varepsilon_i \sqrt{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{a}_i}\boldsymbol{x}} - b_i \; \leq 0, \;\; i = 1,2,\dots,m.$$

(2. 17)

Estas son restricciones no lineales determinísticas equivalentes a las restricciones lineales estocásticas (2.9). Por lo tanto, la solución al problema de programación lineal estocástica definido por (2.1) - (2.3) se obtiene resolviendo el problema de programación no lineal determinístico equivalente, definido como

$$\min_{x} h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$$

(2. 18)

$$Sujeto\ a:$$

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}'\boldsymbol{x} + \varepsilon_i \sqrt{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{a}_i}\boldsymbol{x}} - b_i \;\; \leq 0, \;\; i = 1,2,\dots,m$$

(2. 19)

$$x_j \geq 0, \;\; i = 1,2,\dots,m.$$

(2. 20)

Observe que si las variables aleatorias a_{ij} son independientes para un i fijo, se obtiene que:

$$Cov(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{a}_i} = diag\big(Var(a_{i1}), Var(a_{i2}), \dots, Var(a_{in})\big).$$

(2. 21)

En este caso el problema (2.18) - (2.20) se puede escribir como:

$$\min_{x} h(x) = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$$

(2. 22)

$$\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} + \varepsilon_i \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left[Var(a_{ij})x_j^2\right]} - b_i \leq 0, \quad i = 1,2, \dots, m$$

(2. 23)

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2, \dots, m.$$

(2. 24)

Ejemplo 1: Suponga que se tiene el siguiente modelo de programación lineal:

$$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$Sujeto\ a:$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + \quad 2x_3 \leq 460$$

$$x_1 + 4x_2 + \quad \leq 420$$

$$x_1, x_2, x_3 \quad \geq 0.$$

(2. 25)

Considerando que el problema es determinístico, usando el programa LINGO (2019), (Apéndice A), los resultados obtenidos se resumen en el Cuadro 2 (ver página siguiente).

Recuerde que, $\min_{\boldsymbol{x}} h(\boldsymbol{x}) = -\max_{\boldsymbol{x}} h(\boldsymbol{x})$.

Cuadro 2: Resultados ejemplo 1, modelo determinístico.

Variable	Valor
Z_{max}	1350
x_1	0
x_2	100
x_3	230

Ahora supongamos que los a_{ij} son aleatorios, más aún:

$$\boldsymbol{a}_1 \sim \mathcal{N}_3\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}36&0&0\\0&16&0\\0&0&12\end{pmatrix}\right],$$

(2. 26)

$$\boldsymbol{a}_2 \sim \mathcal{N}_3\left[\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7&0&0\\0&15&0\\0&0&4\end{pmatrix}\right],$$

(2. 27)

y que

$$\boldsymbol{a}_3 \sim \mathcal{N}_3\left[\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12&0&0\\0&8&0\\0&0&10\end{pmatrix}\right].$$

(2. 28)

Además, suponga que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.05$, de donde $1-\alpha = 0.95$, luego $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1.645$. Así, por (2.23)

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 1.645\sqrt{36x_1^2 + 16x_2^2 + 12x_3^2} - 430 \leq 0$$

$$3x_1 + 2x_3 + 1.645\sqrt{7x_1^2 + 15x_2^2 + 4x_3^2} - 460 \leq 0$$

$$x_1 + 4x_2 + 1.645\sqrt{12x_1^2 + 8x_2^2 + 10x_3^2} - 420 \leq 0.$$

(2. 29)

Por lo tanto, el problema determinístico equivalente (programa no lineal) se establece como:

$$\max_x Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$Sujeto\ a$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 1.645\sqrt{36x_1^2 + 16x_2^2 + 12x_3^2} - 430 \leq 0$$

$$3x_1 + 2x_3 + 1.645\sqrt{7x_1^2 + 15x_2^2 + 4x_3^2} - 460 \leq 0$$

$$x_1 + 4x_2 + 1.645\sqrt{12x_1^2 + 8x_2^2 + 10x_3^2} - 420 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(2. 30)

Resolviendo este problema de programación no lineal con restricciones en LINGO (2019) (Apéndice B), los resultados obtenidos se resumen en el Cuadro 3 (ver página siguiente)

Cuadro 3: Resultados ejemplo 1, Caso. $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$ *son aleatorios,* $\boldsymbol{i} = 1, \dots, m.$

Variable	Valor
Z_{max}	334.3132
x_1	10.31855
x_2	4.649083
x_3	58.81189

Caso II.* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ *aleatorio. En este caso suponga que:

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{b}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{b}_\mathrm{m} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_\mathrm{m}(\bar{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{b}). \tag{2.31}$$

Las restricciones (2.2) se pueden replantear como:

$$P(\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} \leq b_i) = P\left(\frac{\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} - \bar{b}_i}{\sqrt{Var(b_i)}} \leq \frac{b_i - \bar{b}_i}{\sqrt{Var(b_i)}}\right) \geq 1 - \alpha_i, \quad i = 1,2,\dots,m, \tag{2.32}$$

Donde:

$$\frac{b_i - \bar{b}_i}{\sqrt{Var(b_i)}} \sim \mathcal{N}(0,1), \quad i = 1,2,\dots,m.$$

Luego (2.32) se puede escribir como:

$$1 - P\left(\frac{b_i - \bar{b}_i}{\sqrt{Var(b_i)}} \leq \sqrt{Var(b_i)}\right) > 1 - \alpha_i, \quad i = 1,2,\dots,m,$$

o

$$P\left(\frac{b_i - \bar{b}_i}{\sqrt{Var(b_i)}} \leq \frac{\boldsymbol{a}_i' x - \bar{b}_i}{\sqrt{Var(b_i)}}\right) \leq \alpha_i, \quad i = 1,2,\dots,m. \tag{2.33}$$

Ahora, si δ_i denota el valor de la normal estándar tal que:

$$\Phi(\delta_i) = \alpha_i \,,$$

la restricción (2.33) se expresa como:

$$\Phi\left(\frac{\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} - \bar{b}_i}{\sqrt{Var(b_i)}}\right) \leq \Phi(\delta_i), \quad i = 1,2,\dots,m.$$

Ahora, debido al carácter monótono de la función $\Phi(\delta_i)$ las desigualdades son válidas si y solo si:

$$\frac{\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} - \bar{b}_i}{\sqrt{Var(b_i)}} < \delta_i, \quad i = 1,2,\dots,m,$$

o equivalentemente:

$$\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} - \bar{b}_i - \delta_i\sqrt{Var(b_i)} \leq 0, \quad i = 1,2,\dots,m.$$

Por lo tanto, el problema de programación lineal estocástica establecido por (2.1) - (2.3) es equivalente al problema de programación lineal determinístico:

$$\min_{\boldsymbol{x}} h(x) = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$$

$$Sujeto\ a:$$

$$\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} - \bar{b}_i - \delta_i\sqrt{Var(b_i)} \leq 0, \quad i = 1,2,\dots,m$$

(2. 33)

Ejemplo 2. Considere el mismo problema de programación lineal (2.25) pero ahora:

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_3\left[\begin{pmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1600 & 0 & 0 \\ 0 & 1800 & 0 \\ 0 & 0 & 900 \end{pmatrix}\right],$$

además, si $\alpha = 0.05, \delta = -1.645$, por lo tanto, el problema de programación lineal determinístico es:

$$Max\ Z = 3x1 + 2x2 + 5x3$$

$$Sujeto\ a:$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 1.645\sqrt{1600} \leq 430$$

$$3x_1 + 2x_3 + 1.645\sqrt{1800} \leq 460$$

$$x_1 + 4x_2 + 1.645\sqrt{900} \leq 420$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Cuya solución obtenida en LINGO (2019) es (Apéndice C), los resultados obtenidos se resumen en el Cuadro 4(ver página siguiente).

Cuadro 4: Resultados ejemplo 2, Caso **b** $\in \mathbb{R}^n$ aleatorio.

Variable	Valor
Z_{max}	1144.635
x_1	0
x_2	84.54923
x_3	195.1074

Caso III. $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$***, aleatorio.*** Note que como $\boldsymbol{c} \sim \mathcal{N}_n(\bar{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{\Sigma_c})$ y $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$ se tiene que:

$$f(\boldsymbol{x}) \sim N(\bar{\boldsymbol{c}}'\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma_c}\boldsymbol{x}) = \mathcal{N}\left(\bar{f}, \mathrm{Var}(f)\right).$$

La nueva función objetivo determinística a **minimizar** se formula como:

$$F(\boldsymbol{x}) = k_1\bar{\boldsymbol{c}}'\boldsymbol{x} + k_2\sqrt{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma_c}\boldsymbol{x}}, \tag{2.34}$$

donde $k_1\, y\, k_2 \geq 0$ son constantes cuyos valores determinan la importancia relativa de $\bar{f}\ y \sqrt{Var(f)}$ en el problema de optimizacion, asi si $k_1 = 0$ indica que se esta interesado en minimizer la variabilidad de f alrededor de su valor medio sin procuparse por lo que sucede en el valor medio de f. Y si $k_2 = 0$ indica que el valor medio de f debe ser minimizado sin importer la variabilidad de f. Similarmente si $k_1 = k_2$, indica que se esta dando igual importancia al valor medio y a la desviacion estandar. Por lo general se utilizan los siguientes valores:

$$k_1 = k_2 = 1 \quad o \quad k_1 = k_2 = 0.5.$$

Observe que, si el problema es de maximización, el objetivo será maximizar el valor medio de la función $f(\boldsymbol{x})$ y minimizar su desviación estándar, en cuyo caso k_2 debe ser ***negativo***. Lo cual se concluye recordando que $\max_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = -\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$.

Dado que la nueva función objetivo (2.34) es una función no lineal, la solución al problema de programación lineal estocástico definido en (2.1) - (2.3), bajo el caso III, el problema de programación no lineal determinístico equivalente bajo el enfoque de Charnes-Cooper es:

$$\min_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}) = k_1 \overline{\boldsymbol{c}}' \boldsymbol{x} + k_2 \sqrt{\boldsymbol{x}' \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{x}}$$

$$Sujeto\ a:$$

$$\boldsymbol{a}_i' \boldsymbol{x} - b_i \leq 0\,, \quad i = 1,2, \dots, m$$

$$\mathrm{x}_j \geq 0, \quad i = 1,2, \dots, n$$

(2.35)

Y si las variables aleatorias c_j son independientes, esto es, si $Cov(c_r, c_s) = 0$, para todo $r \neq s;\ \ r, s = 1, \dots, n$, la función objetivo se puede escribir como:

$$F(\boldsymbol{x}) = k_1 \overline{\boldsymbol{c}}' \boldsymbol{x} + k_2 \sqrt{\sum_{j=1}^{n} Var(c_j) \mathrm{x}_j^2}$$

(2. 36)

Ejemplo 3. Ahora considerando el mismo problema de programación lineal definido por (2.25) asumiendo que ahora:

$$\boldsymbol{c} \sim \mathcal{N}_3 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \right],$$

se obtiene que, $\mathrm{Var}(f(x)) = \boldsymbol{x}' \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{x} = 12x_1^2 + 7x_2^2 + 17x_3^2$.

El problema de programación no lineal determinístico equivalente queda definido por:

$$\max_{\boldsymbol{x}} Z = k_1(3x_1 + 2x_2 + 5x_3) - k_2 \sqrt{12x_1^2 + 7x_2^2 + 17x_3^2}$$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + \quad 2x_3 \leq 460$$

$$x_1 + 4x_2 + \ \leq 420$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Para fines proactivos se tomarán tres casos, $k_1 = 0$, $k_1 = k_2 = 0.5$ y $k_2 = 0$, las soluciones optimas obtenidas con LINGO (2019) (Apéndice D), los resultados obtenidos se resumen en el Cuadro 5 (ver página siguiente).

Cuadro 5: Resultados ejemplo 3, Caso $\boldsymbol{c} \boldsymbol{\epsilon} \ \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, aleatorio.

Variable	Niveles de k_1 y k_2		
	k_1= 0, k_2= 1	k_1= 1, k_2= 0	k_1=k_2= 0.5
Z_{max}	0	1350	202.0447
x_1	0	0	49.40913
x_2	0	100	92.64772
x_3	0	230	155.8863

Caso IV. $\boldsymbol{a_i} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ ***son aleatorios.*** En este caso se asume que $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}$ son aleatorios y sigues las distribuciones (2.4) - (2.6) respectivamente. También observe que c aparece sólo en la función objetivo, entonces la nueva función objetivo determinística queda definida como en el caso III, esto es la nueva función objetivo está definida por (2.34).

Para el caso de las restricciones (2.2) se pueden expresar como:

$$P(g_i \leq 0) \geq 1 - \alpha_i, \qquad i = 1,2, \dots, m, \tag{2. 37}$$

donde las g_i son las nuevas variables aleatorias definidas como:

$$g_i = \boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} - b_i = \boldsymbol{q}'_i\boldsymbol{y}, \tag{2. 38}$$

donde

$$\boldsymbol{q}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{in} \\ b_i \end{pmatrix} \qquad y \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{2. 39}$$

más aún, $\boldsymbol{q}_i \sim \mathcal{N}_{n+1}(\overline{\boldsymbol{q}}_i, \boldsymbol{\Theta}_i)$; donde

$$\overline{\boldsymbol{q}}_i = \begin{pmatrix} \bar{a}_{i1} \\ \bar{a}_{i2} \\ \vdots \\ \bar{a}_{in} \\ \bar{b}_i \end{pmatrix} \qquad y \qquad \boldsymbol{\Theta_i} = \begin{pmatrix} Cov(\boldsymbol{a}_i) & \boldsymbol{v}_i \\ \boldsymbol{v}_i' & Var(b_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{a}_i} & \boldsymbol{v}_i \\ \boldsymbol{v}_i' & Var(b_i) \end{pmatrix}, \tag{2. 40}$$

y

$$\boldsymbol{v}_i' = [Cov(a_{i1}, b_i), Cov(a_{i2}, b_i), \dots, Cov(a_{in}, b_i)], \qquad i = 1,2, \dots, m.$$

Así $g_i = \boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} - b_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{q}_i'\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{y})$). Además, recordando que

$$Var(x + y) = Var(x) + Var(y) + 2Cov(x, y),$$

se tiene que

$$Var(g_i) = var(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}'\boldsymbol{x} - b_i) = Var(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}'\boldsymbol{x}) + Var(b_i) - 2Cov(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}'\boldsymbol{x}, b_i)$$

$$= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{a}_i}\boldsymbol{x} + Var(b_i) = 2Cov(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}'\boldsymbol{x}, b_i).$$

(2. 41)

Además, observe que si los $\boldsymbol{a}_{i's}$, $i = 1,2, \dots, m$, son independientes y los $\boldsymbol{a}_{i's}$, $i = 1,2, \dots, m, y$ $\boldsymbol{b}$ también, entonces:

$$Var(g_i) = \sum_{j=1}^{n} Var\left(a_{ij}\right)x_j^2 + Var(\, b_i),$$

(2. 42)

por lo tanto, las restricciones (2.37) se puedes reestablecer como

$$P\left(\frac{g_i - \bar{g}_i}{\sqrt{Var(g_i)}} \leq \frac{-\bar{g}_i}{\sqrt{Var(g_i)}}\right) \geq 1 - \alpha_i, \qquad i = 1,2, \dots, m,$$

(2. 43)

donde

$$\frac{g_i - \bar{g}_i}{\sqrt{Var(g_i)}} \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad i = 1,2, \dots, m.$$

(2. 44)

Así, si δ_i denota el percentil de una variable aleatoria normal estándar tal que:

$$\Phi(\delta_i) = 1 - \alpha_i, \qquad i = 1,2, \dots, m,$$

(2. 45)

las restricciones (2.43) se establecen como:

$$\Phi\left(\frac{-\bar{g}_i}{\sqrt{Var(g_i)}}\right) \geq \Phi(\delta_i), \qquad i = 1,2,\dots,m$$

Cuya desigualdad es cierta si y solo si la siguiente desigualdad no lineal se satisfice, debido al carácter monótono de la función de distribución $\Phi(\delta_i)$:

$$\left(\frac{-\bar{g}_i}{\sqrt{Var(g_i)}}\right) \geq \delta_i, \qquad i = 1,2,\dots,m,$$

o equivalentemente:

$$\bar{g}_i + \delta_i\sqrt{Var(g_i)} \leq 0, \qquad i = 1,2,\dots,m.$$

(2. 46)

Así finalmente el problema de programación no lineal determinístico equivalente del problema de programación lineal estocástico (2.1) - (2.3) queda definido como:

$$\min_x F(\boldsymbol{x}) = k_1\bar{\boldsymbol{c}}'\boldsymbol{x} + k_2\sqrt{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{x}}$$

$$Sujeto\ a:$$

$$\bar{g}_i + \delta_i\sqrt{Var(g_i)} \leq 0, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n,$$

(2. 47)

y asumiendo que los a_{ij}, b_i, c_j son independientes, esto es las matrices de varianzas-covarianzas $\boldsymbol{\Sigma_c}, \boldsymbol{\Sigma}_{a_i}, \boldsymbol{\Sigma_b}$, son diagonals y los $\boldsymbol{a}_i', b_i$ son independientes, el problema de programacion no lineal determinístico equivalente (2.47) queda planteado como:

$$\min_{x} F(x) = k_1\bar{\boldsymbol{c}}'\boldsymbol{x} + k_2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} Var(c_i)x_i^2}$$

$$Sujeto\ a:$$

$$\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{x} - \bar{b}_i + \delta_i\sqrt{\sum_{j=1}^{n} Var(a_{ij})x_i^2 + Var(b_i)} \leq 0, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n.$$

Ejemplo 4. Considere el problema (2.25), bajo las hipótesis de que

$$\boldsymbol{c}\sim\mathcal{N}_3\left[\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12&0&0\\0&7&0\\0&0&17\end{pmatrix}\right],$$

$$\boldsymbol{a}_1\sim\mathcal{N}_3\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}36&0&0\\0&16&0\\0&0&12\end{pmatrix}\right],$$

$$\boldsymbol{a}_2\sim\mathcal{N}_3\left[\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7&0&0\\0&15&0\\0&0&4\end{pmatrix}\right],$$

$$\boldsymbol{a}_3\sim\mathcal{N}_3\left[\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12&0&0\\0&8&0\\0&0&10\end{pmatrix}\right],$$

y

$$\boldsymbol{b}\sim\mathcal{N}_3\left[\begin{pmatrix}430\\460\\420\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1600&0&0\\0&1800&0\\0&0&900\end{pmatrix}\right].$$

Por lo tanto, si $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1.645$, con $\alpha = 0.05$ el problema de programacion no lineal deterministico equivalente al problema de programacion lineal estocástico (2.1) - (2.3) se plantea de la siguiente manera:

$$\max_{\boldsymbol{x}} Z = k_1(3x_1 + 2x_2 + 5x_3) - k_2\sqrt{12x_1^2 + 7x_2^2 + 17x_3^2}$$

$$Sujeto\ a$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 1.645\sqrt{36x_1^2 + 16x_2^2 + 12x_3^2 \ + 1600} - 430 \leq 0$$

$$3x_1 + 2x_3 + 1.645\sqrt{7x_1^2 + 15x_2^2 + 4x_3^2 \ + 1800} - 460 \leq 0$$

$$x_1 + 4x_2 + 1.645\sqrt{12x_1^2 + 8x_2^2 + 10x_3^2 \ + 900} - 420 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

El problema es resuelto en LINGO (2019) para $k_1 = 0\ y\ k_2 = 1, k_1 = 1\ y\ k_2 = 0,\ y\ \ k_1\ y\ k_2 = 0.5$ (Apéndice E). Los resultados obtenidos se resumen en el Cuadro 6 (ver página siguiente).

Cuadro 6:Resultados ejemplo 4, Caso $\boldsymbol{a_i} \boldsymbol{\epsilon}\ \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{\epsilon}\ \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{\epsilon}\ \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$

(todos son aleatorios)

Variables	Niveles de k_1 y k_2		
	$k_1 = 0$, $k_2 = 1$	$k_1 = 1$, $k_2 = 0$	$k_1 = k_2 = 0.5$
Z_{max}	0	319.7284	54.24202
x_1	0	9.842144	18.45933
x_2	0	3.796762	19.32093
x_3	0	56.52169	38.92872

CONCLUSIONES

A partir de ciertos resultados de la teoría estadística, se propone la solución para los cuatro casos clásicos de problemas de programación lineal estocástica, desarrollando en detalle, para tal objetivo, la **técnica de programación con restricciones aleatorias**.

La solución mencionada en el punto anterior consiste en establecer explícitamente un problema equivalente de programación lineal o no lineal determinístico. Esta equivalencia implica que la solución del problema de programación lineal o no lineal determinístico es también una solución para el problema original de programación lineal estocástica.

Además, resolviendo un problema de programación lineal estocástico concreto, los cuatro casos de la programación lineal clásicos son resueltos a través de la técnica de programación con restricciones aleatorias y sus soluciones numéricas son obtenidas con ayuda del programa comercial de optimización LINGO (2019), mostrando así que los problemas equivalentes obtenidos tienen solución y por lo tanto los correspondientes problemas de programación lineal estocástico también tienen solución.

Es muy importante señalar que la aplicación de la metodología estadística no es llevada a cabo a un problema práctico en otra área del conocimiento. El objetivo fundamental de esta tesina es hacer una aplicación de los conocimientos de la teoría estadística adquiridos durante mis estudios de **maestría en estadística aplicada** en la solución de un **problema teórico** de la **programación matemática** y la **investigación de operaciones** conocido en la literatura especializada como un **problema de programación lineal estocástica**.

REFERENCIAS

Beale, E. M. L. (1955). On minimizing a convex function subject to lineal inequalities. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological),* 17(1), 173–184.

Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*, 4, 238–252.

Bridge, J. R., & Louveaux, F. (2011). *Introduction to stochastic programming* (2nd ed.). Springer, New York.

Charnes, A., & Cooper, W. W. (1959). Chance-constrained programming. *Management Science* 6(1), 73-79.

Charnes, A., & Cooper, W. W. (1963). Deterministic equivalents for optimizing and satisficing under chance constraints. *Operations Research 11(1)*,18-39.

Dantzig, G. B. (1955). Linear programming under uncertainty. *Management Science,1*(3-4), 197-206.

Dantzig, G. B. (1963). *Linear programming and extensions*. Princeton University Press. Princeton, USA.

Díaz-García, J. A., Ramos-Quiroga, R., & Cabrera, V. E. (2005). Stochastic programming methods in the response surface methodology. *Computational Statistics and Data Analysis, 49*(3), 837-848.

Díaz-García, J. A., & Garay-Tápia, M. M. (2007). Optimum allocation in stratified surveys: Stochastic programming. *Computational Statistics and Data Analysis, 51*(6), 3016-3026.

Díaz-García, J. A., & Ulloa, C. L. (2008). Multi-objective optimisation for optimum allocation in multivariate stratified sampling. *Survey Methodology, 34*(2), 215-222.

Díaz-García, J. A., & Ramos-Quiroga, R. (2012). Optimum allocation in multivariate stratified random sampling: Stochastic matrix mathematical programming. *Statistica Neerlandica, 66*(4), 492-511.

Díaz-García, J. A., & Ramos-Quiroga, R. (2012). Stochastic optimal design in multivariate stratified sampling. *Optimization, 63*(11), 1665-1688.

Gass, F. I. (2003). *Linear programming. Methods and applications*. (5th ed.). Dover Publications.

Hejazi, T. H., Bashiri M., Díaz-García, J. A., & Noghondarian, K. (2012). Optimization of probabilistic multiple response surfaces. *Applied Mathematical Modelling, 36*(3), 1275-1285.

Lindo Systems, Inc. (2019). *LINGO 2019 [API 12.0.3977.143, Software].* Lindo Systems, Inc. http://www.lindo.com.

Muirhead, R. J. (2005). *Aspects of multivariate statistical theory*. John Wiley y Sons.

Prékopa, A. (1978). *The use of stochastic programming for the solution of some problems in statistics and probability* (Technical summary report 1983). University of Wisconsin-Madison.

Prékopa, A. (1995). *Stochastic programming*. Kluwer Academic Publishers. (Serie Mathematics and Its Applications).

Ramos, A., & Cerisela, S. (2005). *Optimización estocástica.* Universidad Pontificia de Madrid.

Rencher, A. (2002). *Methods of multivariate analysis*. John Wiley & Sons.

Shapiro, A., Dentcheva, D., & Ruszczyński, A. (2014). *Lectures on stochastic programming: modeling and theory.* (2nd ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics.

Stancu-Minasian, I. M. (1984). *Stochastic programming*. Reidel P. Co. Dordrecht.

Uryasev, S., & Pardalos, P. M. (2001). *Stochastic optimization*. Kluwer Academic Publishers.

Van Slyke, R. M., & Wets, R. J. B. (1962). L-shaped linear programs with application to optimal control and stochastic programming. *SIAM Journal an Applied Mathematical, 17*(4), 638-663.

Vanderbei, R. J. (2008). *Linear programming. Foundations and Extension 0073*. (3rd ed.). Springer.

APÉNDICE

En esta sección se presentan los códigos empleados para la resolución de los cinco ejemplos analizados a lo largo del presente trabajo.

Apéndice A

Código de programación en LINGO ejemplo 1, modelo determinístico

```
MODEL:

SETS:
CC / 1..3 /: C,A1,A2,A3,B,X;
END SETS
DATA:
C = 3 2 5;
A1 = 1 2 1;
A2 = 3 0 2;
A3 = 1 4 0;
B = 430 460 420;
END DATA
[OBJ] MAX = @SUM(CC(I): C(I)*X(I));
[RES1] @SUM(CC(I): A1(I)*X(I)) <= B(1);
[RES2] @SUM(CC(I): A2(I)*X(I)) <= B(2);
[RES3] @SUM(CC(I): A3(I)*X(I)) <= B(3);
! RESTRICCIONES DE DOMINIO;
@FOR(CC(I): X(I) >= 0);
END
```

Apéndice B

Código de programación en LINGO ejemplo 1, *Caso.* $\boldsymbol{a}_{\mathrm{i}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *son aleatorios,*

```
MODEL:
SETS:
CC / 1..3 /: C,A1,A2,A3,B,V1,V2,V3,X;
END SETS
DATA:
C = 3 2 5;
A1 = 1 2 1;
A2 = 3 0 2;
A3 = 1 4 0;
B = 430 460 420;
V1 = 36 16 12;
V2 = 7 15 4;
V3 = 12 8 10;
ALPHA = 0.05;
END DATA
[OBJ] MAX = @SUM(CC(I): C(I)*X(I));
[RES1] @SUM(CC(I): A1(I)*X(I)+@NORMSINV(1-ALPHA)* ...
        @SQRT(@SUM(CC(I):V1(I)*X(I)*X(I))) <= B(1);
[RES2] @SUM(CC(I): A2(I)*X(I)+@NORMSINV(1-ALPHA)* …
        @SQRT(@SUM(CC(I):V2(I)*X(I)*X(I))) <= B(2);
[RES3] @SUM(CC(I): A3(I)*X(I)+@NORMSINV(1-ALPHA)* …
        @SQRT(@SUM(CC(I):V3(I)*X(I)*X(I))) <= B(3);
! RESTRICCIONES DE DOMINIO;
@FOR(CC(I): X(I) >= 0);
END
```

Apéndice C

Código de programación en LINGO ejemplo 2, Caso $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ aleatorio

```
MODEL:

SETS:

CC / 1..3 /: C,A1,A2,A3,B,VB,X;

END SETS

DATA:

C = 3 2 5;

A1 = 1 2 1;

A2 = 3 0 2;

A3 = 1 4 0;

B = 430 460 420;

VB = 1600 1800 900;

ALPHA = 0.05;

END DATA

[OBJ] MAX = @SUM(CC(I): C(I)*X(I));

[RES1] @SUM(CC(I): A1(I)*X(I))-@NORMSINV(ALPHA)*@SQRT(VB(1)))...
          <= B(1);

[RES2] @SUM(CC(I): A2(I)*X(I))-@NORMSINV(ALPHA)*@SQRT(VB(2)))...
          <= B(2);

[RES3] @SUM(CC(I): A3(I)*X(I))-@NORMSINV(ALPHA)*@SQRT(VB(3)))...
           <= B(3);

! RESTRICCIONES DE DOMINIO;

@FOR(CC(I): X(I) >= 0);
```

Apéndice D

Código de programación en LINGO ejemplo 3, Caso $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, aleatorio

```
MODEL:

SETS:

CC / 1..3 /: C,A1,A2,A3,B,VC,X;

END SETS

DATA:

C = 3 2 5;

A1 = 1 2 1;

A2 = 3 0 2;

A3 = 1 4 0;

B = 430 460 420;

VC = 12 7 17;

K1 = 0.5;

K2 = 0.5;

END DATA

[OBJ] MAX = @SUM(CC(I): K1*(C(I)*X(I))-K2*@ (@SUM(CC(I):VC(I)*X(I)*X(I)));

[RES1] @SUM(CC(I): A1(I)*X(I)) <= B(1);

[RES2] @SUM(CC(I): A2(I)*X(I)) <= B(2);

[RES3] @SUM(CC(I): A3(I)*X(I)) <= B(3);

! RESTRICCIONES DE DOMINIO;

@FOR(CC(I): X(I) >= 0);

END
```

Apéndice E

Código de programación en LINGO ejemplo 4, *Caso* $a_i \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ (todos *son aleatorios*)

```
MODEL:
SETS:
CC / 1..3 /: C,A1,A2,A3,B,V1,V2,V3,VB,VC,X;
END SETS
DATA:
C = 3 2 5;
A1 = 1 2 1;
A2 = 3 0 2;
A3 = 1 4 0;
B = 430 460 420;
V1 = 36 16 12;
V2 = 7 15 4;
V3 = 12 8 10;
VB = 1600 1800 900;
VC = 12 7 17;
ALPHA = 0.05;
K1 = 0.5;
K2 = 0.5;
END DATA
[OBJ] MAX = @SUM(CC(I): K1*(C(I)*X(I))-K2*
        ..
        @SQRT(@SUM(CC(I):VC(I)*X(I)*X(I)));
```

```
[RES1] @SUM(CC(I): A1(I)*X(I)+@NORMSINV(1-ALPHA)* …
          @SQRT(@SUM(CC(I):V1(I)*X(I)*X(I)+1600)) <= B(1);
[RES2] @SUM(CC(I): A2(I)*X(I)+@NORMSINV(1-ALPHA)*
         @SQRT(@SUM(CC(I):V2(I)*X(I)*X(I)+1800)) <= B(2);
[RES3] @SUM(CC(I): A3(I)*X(I)+@NORMSINV(1-ALPHA)* …
         @SQRT(@SUM(CC(I):V3(I)*X(I)*X(I)+900)) <= B(3);
! RESTRICCIONES DE DOMINIO;
@FOR(CC(I): X(I)>= 0);
END
```