

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIHUAHUA
FACULTAD DE INGENIERÍA
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO



**DESARROLLO DE SOFTWARE PARA EL ANÁLISIS Y DISEÑO DE
ELEMENTOS VIGA.**

POR:

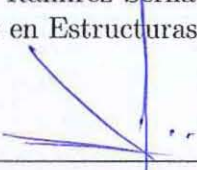
JUAN SEBASTIÁN RAMÍREZ SERNA

**TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL
GRADO DE:**

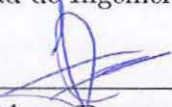
MAESTRO EN ESTRUCTURAS



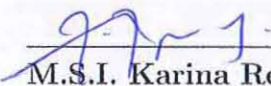
Desarrollo de software para el análisis y diseño de elementos viga. Tesis por Juan Sebastian Ramirez Serna como requisito parcial para obtener el grado de Maestro en Estructuras, ha sido aprobado y aceptado por:



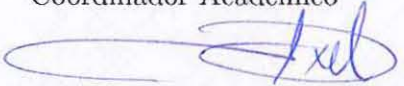
M.I. Fabián Vinicio Hernández Martínez
Director de la Facultad de Ingeniería



Dr. Fernando Martínez Reyes
Secretario de Investigación y Posgrado



M.S.I. Karina Requena Yáñez
Coordinador Académico



Dr. Axel Fernando Domínguez Alvarado
Director de Tesis

Abril 2023

Fecha

Comité:

Dr. Axel Fernando Domínguez Alvarado
M.S.C. Rubén Castañeda Balderas
M.E. Mirna Teresita Armendáriz Hernández
Dr. Mario Alberto Madrid Pérez



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
CHIHUAHUA

27 de abril de 2023.

ING. JUAN SEBASTIÁN RAMÍREZ SERNA

Presente. -

En atención a su solicitud relativa al trabajo de tesis para obtener el grado de Maestro en Estructuras, nos es grato transcribirle el tema aprobado por esta Dirección, propuesto y dirigido por el director **Dr. Axel Fernando Domínguez Alvarado** para que lo desarrolle como tesis, con el título **“DESARROLLO DE SOFTWARE PARA EL ANÁLISIS Y DISEÑO DE ELEMENTOS VIGA”**.

Índice de Contenido

Agradecimientos

Resumen

Índice de Contenido

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Capítulo 1. Introducción

Capítulo 2. Marco teórico

- 2.1 PHP (Hypertext Preprocessor)
- 2.2 HTLM (Hypertext Markup Lenguaje)
- 2.3 Laravel
- 2.4 Bootstrap

Capítulo 3. Planteamiento del problema

- 3.1 Antecedentes
- 3.2 Justificación
- 3.3 Objetivo general
- 3.4 Objetivos específicos

Capítulo 4. Desarrollo de la solución propuesta

- 4.1 Investigación preliminar
- 4.2 Determinación de los requerimientos del sistema



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
CHIHUAHUA

- 4.3 Diseño del sistema
- 4.4 Desarrollo del software
- 4.5 Pruebas del sistema
- 4.6 Implantación y evaluación

Capítulo 5. Resultados

Capítulo 6. Conclusiones y recomendaciones

Referencias

Apéndice

Currículum Vitae

ATENTAMENTE
"naturam subiecit aliis"

EL DIRECTOR

**M.I. FABIÁN VINICIO HERNÁNDEZ
MARTÍNEZ**

**SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN
Y POSGRADO**

DR. FERNANDO MARTÍNEZ REYES

Dedicatoria

A mis padres, quienes han sido mi mayor apoyo incondicional durante todo este camino. Gracias por creer en mí y por ser mis pilares en los momentos difíciles. Sin su amor, paciencia y enseñanzas, nunca habría llegado hasta aquí.

A mi esposa y mi hija, quienes son el motor de mi vida. Gracias por su amor, comprensión y por motivarme cada día a ser una mejor persona y profesional. Su amor me ha dado la fuerza para enfrentar todos los desafíos que se presentaron en el camino hacia esta meta.

A mi director de tesis, por su valioso apoyo y orientación en mi formación profesional. Gracias por compartir su conocimiento y experiencia, y por ayudarme a desarrollar mi potencial en este campo. Sus consejos y sugerencias han sido fundamentales para la elaboración de este trabajo y me han impulsado a crecer como profesional.

Este logro no es solo mío, sino de todas las personas que me han acompañado en este camino. A todos ellos, les dedico este trabajo con todo mi cariño y agradecimiento



Índice general

1. Introducción	10
2. Justificación	12
3. Marco Teórico	13
3.1. Vigas Euler-Bernoulli en el Plano	13
3.1.1. Desplazamientos y deformaciones.	14
3.1.2. Ecuaciones de comportamiento y fuerzas internas.	15
3.1.3. Ecuaciones de equilibrio	16
3.2. Método de Elementos Finitos	17
3.3. SCILAB	19
3.4. Especificaciones para construcciones de acero estructural.	20
4. Objetivos	22
4.1. Objetivo General	22
4.2. Objetivos Secundarios	22
5. Metodología	24
5.1. Aplicación del método de elementos finitos a vigas en el plano.	24
5.1.1. Aplicación del FEM a una ecuación general.	24
5.1.2. Adaptación de las ecuaciones de vigas a la ecuación general.	25
5.2. Programación.	29
5.3. Validación.	30
6. Resultados y validación	31
6.1. Analíticos.	32
6.1.1. Comprobación 1	33
6.1.2. Comprobación 2	35
6.1.3. Comprobación 3	37
6.1.4. Comprobación 4	39
6.1.5. Comprobación 5	41

6.2. Numéricos	44
6.2.1. Comprobación 1	45
6.2.2. Comprobación 2	48
6.2.3. Comprobación 3	52
6.3. Marco de tres niveles	55
7. Diseño	62
7.1. Diseño a tensión 1	62
8. Conclusiones.	65



Índice de cuadros

6.1. Tipos de condiciones de frontera.	32
6.2. Comparación de desplazamientos en los nodos	61



Índice de figuras

3.1. Ilustración de la sección transversal antes y después de la deformación (Readle, 2019).	14
3.2. Cinemática de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli (Sinira y cols., 2014).	15
3.3. Diagrama de cuerpo libre de un infinitesimal de viga de Euler-Bernoulli (Domínguez, 2015).	17
3.4. Tipos de elementos finitos (Medina y cols., 2005).	18
3.5. Mallados de un dominio utilizando distintas cantidades de elementos (Frei, 2013).	19
6.1. Viga propuesta para la comprobación 1 analítica.	33
6.2. Valor de ϵ de V obtenido por ANDIS y COMSOL con diferentes GL para la comprobación 1 analítica.	34
6.3. Valor de ϵ de M_z obtenido por ANDIS y COMSOL con diferentes GL para la comprobación 1 analítica.	34
6.4. Viga propuesta para la comprobación 2 analítica.	35
6.5. Valor de ϵ de V obtenido por ANDIS y COMSOL con diferentes GL para la comprobación 2 analítica.	36
6.6. Valor de ϵ de M_z obtenido por ANDIS y COMSOL con diferentes GL para la comprobación 2 analítica.	37
6.7. Viga para la comprobación 3 analítica.	37
6.8. Valor de ϵ de V obtenido por ANDIS y COMSOL con diferentes GL para la comprobación 3 analítica.	38
6.9. Valor de ϵ de M_z obtenido por ANDIS y COMSOL con diferentes GL para la comprobación 3 analítica.	39
6.10. Viga para la comprobación 4 analítica.	39
6.11. Comparación de error en el cálculo del cortante para el ejemplo 5.	40
6.12. Comparación de error en el cálculo del momento para el ejemplo 5.	41
6.13. Comprobación #6.	41
6.14. Comparación del desplazamiento en v del ejemplo 12.	43
6.15. Comparación de la rotación θ del ejemplo 12.	43
6.16. Comparación de fuerza cortante del ejemplo 12.	44
6.17. Comparación de momento del ejemplo 12.	44

6.18. Comprobación #1	45
6.19. Valor de u obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 1 numérica	45
6.20. Valor de v obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 1 numérica	46
6.21. Valor de θ obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 1 numérica	46
6.22. Valor de carga axial obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 1 numérica	47
6.23. Valor de fuerza cortante obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 1 numérica	47
6.24. Valor de momento obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 1 numérica	48
6.25. Comprobación #2.	48
6.26. Valor de u obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 2 numérica	49
6.27. Valor de v obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 2 numérica	50
6.28. Valor de θ obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 2 numérica	50
6.29. Valor de fuerza axial obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 2 numérica	51
6.30. Valor de fuerza cortante obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 2 numérica	51
6.31. Valor de momento obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 2 numérica	52
6.32. Comprobación 3.	52
6.33. Valor de u obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 3 numérica	53
6.34. Valor de v obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 3 numérica	53
6.35. Valor de θ obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 3 numérica	54
6.36. Valor de fuerza axial obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 3 numérica	54
6.37. Valor de fuerza cortante obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 3 numérica	55

6.38. Valor de momento obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 3 numérica	55
6.39. Modelo a analizar con ANDIS.	56
6.40. Creando geometría en ANDIS.	57
6.41. Creando sección transversal en ANDIS.	57
6.42. Creando carga en el nodo 2 en ANDIS.	58
6.43. Creando carga en la viga 2 en ANDIS.	58
6.44. Creando carga en la viga 5 en ANDIS.	59
6.45. Creando carga en la viga 8 en ANDIS.	59
6.46. Asignación de apoyos en ANDIS.	60
6.47. Asignación del mallado a las vigas en ANDIS.	60
6.48. Desplazamientos de los nodos en el marco.	61
7.1. Definición de geometría EJ1 de diseño.	63
7.2. Parametros EJ1 de diseño.	63
7.3. Resultado EJ1 de diseño.	64



Capítulo 1

Introducción

En la ingeniería, es de gran importancia encontrar las fuerzas internas y los desplazamientos que se producen en los elementos estructurales ya que de estas depende su correcto dimensionamiento. Existen gran cantidad de técnicas para encontrar estas fuerzas, a las cuales se les conoce como análisis estructural. En épocas pasadas los cálculos en el análisis estructural eran realizados manualmente, por ejemplo, utilizando el método de Cross (publicado por primera vez en (ASCE, 1930)) o el método de rigidez. El primero de estos métodos es iterativo, mientras que el segundo resulta en un sistema de ecuaciones simultáneas, por lo que ambos métodos pueden volverse tediosos de realizar a mano en estructuras complejas (Hibbeler, 2014).

Con llegada de las computadoras en la década de 1970 y su capacidad de resolver grandes sistemas de ecuaciones simultáneamente, se generaron dos cambios fundamentales en la forma de hacer un análisis estructural (Gonzalez, 2002). El primero, radicaba en el tiempo necesario para llevar a cabo un análisis, algo que podía llegar a tomar días en realizarse manualmente, con una computadora tomaba minutos. En segundo lugar, permitió emplear métodos más complejos y a su vez más exactos, se pudo emplear el método de elementos finitos.

El método de elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés Finite Element Method) permite obtener la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) definidas en un dominio. El FEM, aproxima una solución al problema resolviendo las EDP solo en puntos discretos del dominio, para lo que es necesario resolver un sistema de ecuaciones simultáneas aún más grande que el que resultaría del método de las rigideces. Debido a esta complicación, el FEM no tuvo

mucha aceptación en el pasado, sin embargo, hoy en día es una de las técnicas más poderosas y hay una gran cantidad de software que lo utilizan. Además, el FEM es un método que permite resolver problemas de gran complejidad de forma más “simplez “directa” que otros métodos.

Las universidades con programas educativos de ingeniería civil, mecánica, aeronáutica, aeroespacial, entre otros, deben de hacer competentes a sus estudiantes en el análisis estructural utilizando técnicas de vanguardia, como el FEM, sin embargo, no siempre es posible, ya que los software para realizar este tipo de estudios suelen tener inconvenientes. Por un lado, los software comerciales son costosos y las instituciones por lo general no cuentan con suficientes recursos para obtener licencias, para aquellas que logran adquirir los programas los ponen a disposición de docentes y alumnos a través del uso compartido del recurso. Una alternativa al software comercial es el de tipo libre y gratuito, que entre sus limitantes esta la curva de aprendizaje y la complejidad de los problemas que éste puede resolver.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, se planteó y realizó el desarrollo un software amigable de distribución libre llamado ANDIS (análisis y diseño) capaz de analizar y diseñar elementos estructurales tipo viga en el plano . El software, debía ser programado en alguna otra plataforma libre para así poder distribuirlo sin ningún problema. La plataforma libre elegida fue SCILAB, la cual tiene programados gran cantidad de procedimientos matemáticos útiles para el desarrollo de ANDIS. Para la parte del análisis, se implementó el FEM para resolver las ecuaciones de Euler-Bernoulli de vigas en el plano, esto le da gran versatilidad al software ya que puede resolver problemas estructurales donde se tengan secciones transversales, propiedades del material y cargas dependientes de las coordenadas espaciales x y y . ANDIS, presenta los resultados de fuerzas internas y desplazamientos tanto de forma numérica como visual, lo que le puede dar al usuario un mejor entendimiento del problema. Respecto al diseño, realiza diseños de elementos a tensión, compresión, y flexión según "Specification for Structural Steel Buildings"(AISC, 2016). Por último, es importante mencionar que el usuario puede ver el código y entender todo el proceso hecho por el software. Debido a estas características, el software ANDIS es una herramienta de gran utilidad para docentes y alumnos de ingenierías de cualquier institución, ofreciendo la posibilidad de utilizarlo en todo lugar y todo momento.



Capítulo 2

Justificación

Las universidades con programas de ingenierías como la civil, mecánica, aeronáutica, aeroespacial, entre otras, deben de capacitar a su alumnado para realizar análisis estructural, la mayoría opta por enseñar a fondo métodos fáciles de resolver manualmente, ya que utilizar software tiene complicaciones. El software comercial, suele no mostrar su funcionamiento interno, tener precios elevados, las licencias educativas son limitadas, y si una institución compra licencias, éstas solo deben ser instaladas en sus equipos. El software libre suele ser muy limitado, difícil de manejar y no del todo confiable.

Es por esto que un software amigable de libre distribución, de código abierto, que implemente el FEM para la solución de problemas estructurales sería una gran herramienta para el mundo académico. ANDIS, daría la posibilidad a docentes y alumnos de tener acceso continuo a un software que podría ser utilizado en los diferentes cursos de los programas educativos, y gracias a que su código sería totalmente visible, se puede tener una mejor comprensión de todos los procedimientos implementados en el software. Otra ventaja que tendría este software es que, con el tiempo, alumnos y docentes podrían trabajar en él para incrementar sus capacidades y contar con una mejor herramienta.



Capítulo 3

Marco Teórico

3.1. Vigas Euler-Bernoulli en el Plano

Las vigas son fundamentales en la ingeniería estructural, éstas se caracterizan por tener una de sus tres dimensiones mucho más grande que las otras dos. Se define al eje de la viga como aquel a lo largo de la dimensión más larga y a la sección transversal como la geometría en las direcciones transversales a este eje. De tal forma que para representar la geometría tridimensional una viga, es necesario definir el eje de la viga (unidimensional) y su sección transversal (bidimensional). Existen varias teorías que estudian el comportamiento de los elementos viga, una de ellas es la teoría de Euler-Bernoulli, siendo ésta la más utilizada en la actualidad. Esta teoría, hace las siguientes tres suposiciones cinemáticas para llegar a las ecuaciones que describen el comportamiento de las vigas (Bauchau y Craig, 2009):

- la sección transversal es infinitamente rígida en su plano,
- la sección transversal permanece plana tras la deformación.
- la sección transversal permanece normal al eje de la viga después de deformarse, como se ilustra en la figura 3.1.

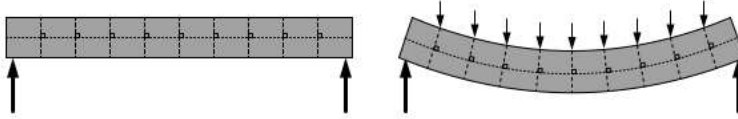


Figura 3.1: Ilustración de la sección transversal antes y después de la deformación (Readle, 2019).

3.1.1. Desplazamientos y deformaciones.

Cualquier punto de una viga puede desplazarse en dirección de x , y y z , estos desplazamientos se denotan por u_x , u_y y u_z , respectivamente. Según las suposiciones de Euler-Bernoulli, los desplazamientos u_x y u_y de un punto de la viga en el plano de coordenadas (x,y) pueden ser descritos a través de la siguiente igualdad:

$$u_x(x, y) = u(x) - y\theta(x), \quad (3.1)$$

$$u_y(x, y) = v(x), \quad (3.2)$$

donde $u(x)$ y $v(x)$ son los desplazamientos en una coordenada x del eje de la viga en dirección de x y y , respectivamente; θ es la rotación en una coordenada x del eje de la viga. La rotación está relacionada al desplazamiento v por la siguiente expresión:

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.3)$$

En la figura 3.2, se muestra de forma visual como es que se puede describir la cinemática de una viga de Euler-Bernoulli por medio de los desplazamientos del eje de la viga $u(x)$, $v(x)$ y $\theta(x)$.

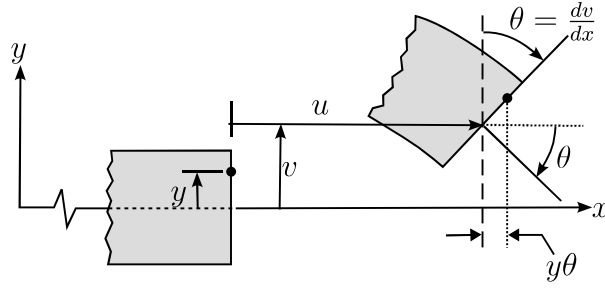


Figura 3.2: Cinemática de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli (Sinira y cols., 2014).

En la teoría de Euler-Bernoulli, la deformación axial $\varepsilon_x(x, y)$ en un punto de la viga con coordenadas (x, y) en función de u y θ está dada por:

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{du}{dx} - y \frac{d\theta}{dx}. \quad (3.4)$$

A partir de la expresión (3.4), se definen la deformaciones axial del eje la viga

$$\varepsilon_x^a = \frac{du}{dx} \quad (3.5)$$

y a la deformación por flexión del eje de la viga

$$\varepsilon_x^b = -y \frac{d\theta}{dx}. \quad (3.6)$$

3.1.2. Ecuaciones de comportamiento y fuerzas internas.

Las ecuaciones de comportamiento son aquellas que ligán esfuerzos o fuerzas con deformaciones. La ley de Hook, para un cuerpo en tres dimensiones y material isótropo, relaciona al esfuerzo axial $\sigma_x(x, y)$ con la deformación axial $\varepsilon_x(x, y)$ de la siguiente forma:

$$\sigma_x(x, y, z) = E\varepsilon_x(x, y, z), \quad (3.7)$$

donde E es el módulo de Young. Si se aplica la ecuación (3.4) en (3.7), se obtiene

$$\sigma_x(x, y) = E \left(\frac{du}{dx} - y \frac{d\theta}{dx} \right). \quad (3.8)$$

Las fuerzas internas resultantes en la sección transversal se calculan de la siguiente manera:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad \text{y} \quad M_z = - \int_A \sigma_x y dA. \quad (3.9)$$

En estas expresiones, \int_A indica integral en la sección transversal; a N y M_z se les denomina fuerza axial y momento respecto al eje z , respectivamente. Al introducir la expresión (3.8) en (3.9), se obtiene:

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.10)$$

$$M_z = EI_z \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (3.11)$$

donde $A = \int_A dA$ es el área de la sección transversal, e $I_z = \int_A y^2 dA$ es el segundo momento de inercia respecto al eje z . Las ecuaciones (3.10) y (3.11) se conocen como las ecuaciones de comportamiento de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, las cuales dicen que si existe alguna deformación en la viga, entonces se producirá una fuerza interna.

3.1.3. Ecuaciones de equilibrio

Según las suposiciones de Euler-Bernoulli, para una viga en el plano sometida a densidad de momento, densidad de fuerza transversal y densidad de fuerza axial, se obtiene el diagrama de cuerpo libre del infinitesimal de viga mostrado en la figura 3.3. Al aplicar la segunda ley de Newton a este infinitesimal, se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N}{\partial x} = f_x \quad (3.12)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial M_z}{\partial x} - Q = m \quad (3.13)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} = f_y \quad (3.14)$$

En donde:

- ρ , A , e I es la densidad del material.
- Q es la fuerza cortante interna, necesaria para el equilibrio interno (figura 3.3).
- f_x , f_y , m son densidades de fuerzas externas aplicadas al sistema, fuerzas en el eje x , fuerzas en el eje y y momentos respecto al eje z .

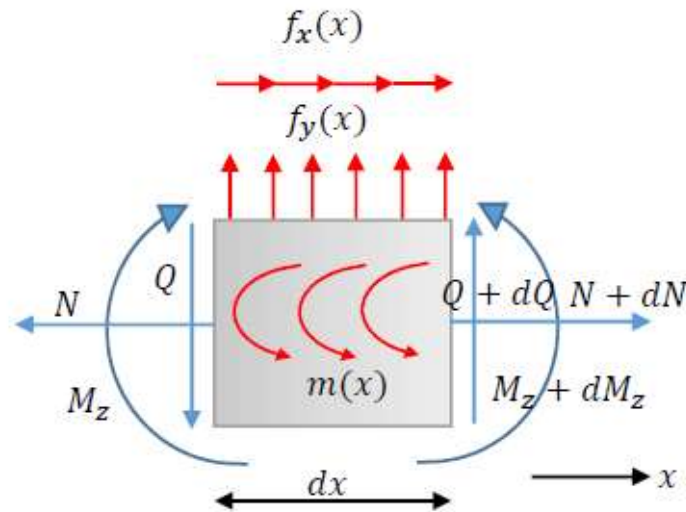


Figura 3.3: Diagrama de cuerpo libre de un infinitesimal de viga de Euler-Bernoulli (Domínguez, 2015).

3.2. Método de Elementos Finitos

El método de elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés) (Bathe, 2008; Dhatt, 2012; Pelosi, 2007) fue desarrollado por el matemático alemán Richard Courant, quien lo empleó para resolver problemas de equilibrio y vibración (Courant, 1943). Sin embargo, este método comenzó a tomar importancia con la llegada de las computadoras debido a que los sistemas de ecuaciones a resolver son demasiado grandes y tediosos para ser resueltos manualmente.

El método de los elementos finitos permite obtener una solución numérica aproximada sobre un dominio en el que están definidas ciertas ecuaciones diferenciales, dividiéndolo en subdominios denominados elementos finitos. Los elementos finitos pueden ser unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales; existen varios tipos de éstos, como se muestra en la figura 3.4. Al conjunto de elementos finitos se le denomina mallado, el cual genera cierta cantidad de puntos llamados nodos. De esta forma, al aplicar el FEM, las incógnitas del problema son los valores en los nodos de las funciones que satisfacen las ecuaciones diferenciales (Jagota y cols., 2013). La precisión de la aproximación obtenida por el FEM depende de la cantidad de elementos para representar el dominio; a mayor cantidad de elementos, mejor calidad de la aproximación. Por ejemplo, en la figura 3.5, se muestra como al utilizar una mayor cantidad de elementos, se puede hacer una mejor representación de un dominio.

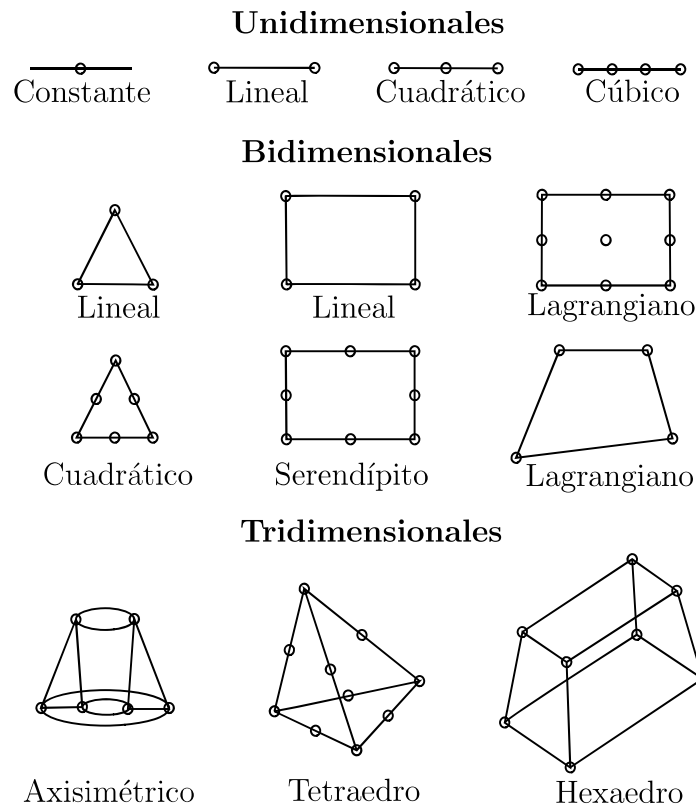


Figura 3.4: Tipos de elementos finitos (Medina y cols., 2005).

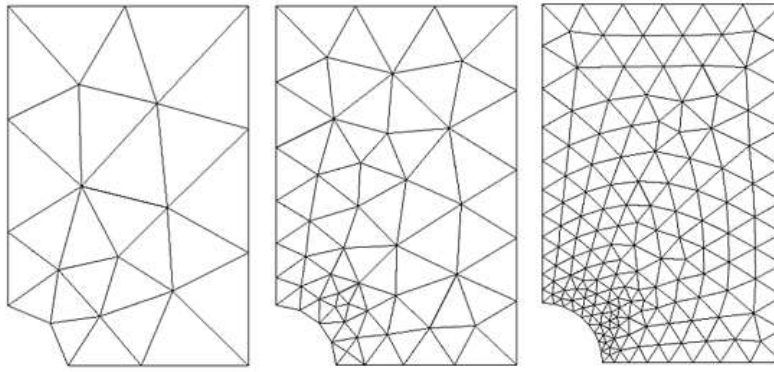


Figura 3.5: Mallados de un dominio utilizando distintas cantidades de elementos (Frei, 2013).

Este método también es utilizado con el fin de optimizar los diseños estructurales, un ejemplo de esto es encontrar la distribución de material para poder obtener mejores resultados en el comportamiento del elemento, en este caso es posible optimizar cualquier tipo de aspecto en el diseño como las dimensiones, ubicación de los apoyos entre otros. (Acosta y Antonio, 2011). Sin embargo, en el ámbito de la ingeniería civil también se ha utilizado aplicado a vibraciones (Tarancon, 2008), aplicado a la solución de armaduras hiperestáticas (Carpio y cols., 2011) o como es el caso para análisis estructural (Celigüeta Lizarza, 2008).

Adicionalmente, hay otros campos en que es utilizado este método, uno de ellos es la ingeniería eléctrica, Agüero y Actis (1997) lo usaron para la determinar la distribución de campos electromagnéticos en dispositivos y sistemas eléctricos. De manera similar, una tesis de investigación presenta el perfeccionamiento de pinzas amperimétricas por medio de la aplicación del método de elementos finitos. (Usón Sardaña, 2007)

3.3. SCILAB

En la década de 1980 el “Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique”(INRIA) el cual es un centro de investigación francés especializado en ciencias de la computación y matemáticas aplicadas, desarrollaron un software que llamaron Blaise para el diseño de control asistido por computadora, el cual fue comercializado en el año 1984 Startup Simulog.

A principios de la década de 1990, INRIA cambió el nombre a Scilab, y continuó su desarrollo a través de Scilab Group, conformado por investigadores del INRIA y de la “École Nationale Des Ponts et Chaussées”. Luego, se decidió que Scilab fuera distribuido como software de código abierto. La primera versión de Scilab fue la 1.1 y fue publicada el 2 de enero de 1994. Scilab Group desarrolló Scilab hasta la versión 2.7, a finales de 2002. Desde julio de 2012, Scilab Enterprises desarrolla y publica Scilab, el cual es un lenguaje de programación de alto nivel para cálculo científico e interactivo.

El programa brinda herramientas como gráficos 2D y 3D, animación, álgebra lineal, matrices dispersas, polinomios y funciones racionales, entre otros (Manrique Vega, 2009; Baudin y cols., 2010). Además, éste posee una extraordinaria versatilidad y capacidad para resolver problemas de matemática aplicada, física, ingeniería y procesamiento de señales. Por ejemplo, SCILAB ha sido utilizado por varios autores para el modelado y simulación (Campbell y cols., 2009; Wouwer y cols., 2014), computación científica e ingenieril (Bunks y cols., 2012) y optimización (Baudin y cols., 2010).

3.4. Especificaciones para construcciones de acero estructural.

El AISC, por sus siglas en inglés American Institute of Steel Construction, es una institución establecida en 1921, dedicada al estudio de estructuras de acero que ha publicado “Specification for structural steel buildings” desde 1923 y “Manual of steel construction” desde 1986 (Segui, 2000). Estos dos documentos son escritos y actualizados periódicamente por un comité conformado por ingenieros estructurales, académicos, fabricantes de acero y constructores, con la finalidad de regir y facilitar el diseño de estructuras de acero. La especificación más reciente del AISC es la a360-16 (AISC, 2016). Los métodos de diseño que permite el AISC son: diseño por esfuerzos admisibles (ASD, por sus siglas en inglés) y diseño por factores de carga y resistencia (LRFD, por sus siglas en inglés). El método LRFD es más flexible por lo que resulta en estructuras más económicas, además, es el método más utilizado desde la década de 1990 (McCormac y Nelson, 2002). En el método LRFD, los elementos estructurales son dimensionados de tal forma que la resistencia nominal R_n multiplicada por un factor ϕ sea mayor que la suma del producto de los efectos producidos por

cargas y un factor de carga λ_i , esto se puede escribir como

$$\sum \lambda_i Q_i \leq \phi R_n \quad (3.15)$$

donde Q_i es un efecto producido por una carga (fuerzas axiales, cortantes y momentos).



Capítulo 4

Objetivos

4.1. Objetivo General

Desarrollar un software gratuito y de código abierto, para el análisis y diseño de vigas, utilizando Scilab, las ecuaciones de Euler-Bernoulli, el FEM y la especificación AISC a360-16.

4.2. Objetivos Secundarios

- Desarrollar un código en Scilab, basado en las expresiones propuestas por Domínguez (2015), para resolver mediante el FEM las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de elementos viga.
- Construir una interfaz gráfica para el ingreso de los datos necesarios para que el programa se ejecute y presente resultados en la misma interfaz gráfica. Esta interfaz será lo más simple posible para que su manejo sea intuitivo.
- Resolver el diseño de los elementos que sean introducidos en el programa de acuerdo con la información suministrada por el usuario, y presentar un resumen de resultados del análisis y el diseño. El diseño de los elementos será utilizando la normativa AISC para elementos a compresión, tensión y flexión.

- Generar un reporte de los cálculos y verificaciones realizadas a lo largo de la ejecución del programa; este reporte será generado en el lenguaje \LaTeX con el fin de tener un modelo de documento organizado y se puedan presentar ecuaciones con escritura matemática y sea fácil la verificación de los cálculos realizados por el programa.
- Validar los resultados del software comparándolos con soluciones analíticas y con aquellos de otros software.



Capítulo 5

Metodología

5.1. Aplicación del método de elementos finitos a vigas en el plano.

5.1.1. Aplicación del FEM a una ecuación general.

En este trabajo, se propone utilizar las expresiones expuestas por Domínguez (2015) para resolver el problema de vigas en el plano. Domínguez propone una ecuación diferencial general con la que es posible modelar gran cantidad de fenómenos físicos, dicha ecuación es

$$\tilde{K} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t^2} + \tilde{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\tilde{M} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \tilde{O} \tilde{u} + \tilde{r} \right) + \tilde{N} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{P} \tilde{u} = \tilde{f} \quad (5.1)$$

donde \tilde{u} es un vector de incógnitas de tamaño n , \tilde{K} , \tilde{L} , \tilde{M} , \tilde{N} , \tilde{O} y \tilde{P} son matrices de coeficientes de tamaño $n \times n$, \tilde{r} y \tilde{f} son vectores de tamaño n . Además, \tilde{K} , \tilde{L} , \tilde{M} , \tilde{N} , \tilde{O} , \tilde{P} , \tilde{r} y \tilde{f} pueden ser dependientes del espacio x y el tiempo t . De la ecuación (5.1), se define el vector de flujo

$$\tilde{v}_f = -\tilde{M} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \tilde{O} \tilde{u} + \tilde{r}. \quad (5.2)$$

Las condiciones de frontera para la ecuación general pueden ser sobre el vector de flujo \tilde{v}_f o el vector de incógnitas \tilde{u} .

Domínguez aplica el FEM a la ecuación (5.1) donde obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$\ddot{\tilde{\sigma}}\tilde{U} + \dot{\tilde{\lambda}}\tilde{U} + \tilde{T}\tilde{U} = \tilde{e} \quad (5.3)$$

donde \tilde{U} es el vector de incógnitas nodales de tamaño igual al número de grados de libertad N , $\ddot{\tilde{\sigma}}$, $\dot{\tilde{\lambda}}$ y \tilde{T} son matrices de tamaño $N \times N$ y \tilde{e} es un vector de tamaño N . $\ddot{\tilde{\sigma}}$, $\dot{\tilde{\lambda}}$ y \tilde{T} y \tilde{e} pueden ser dependientes del tiempo. El número de grados de libertad N depende del número y el tipo de elementos utilizados para mallar el dominio. N puede ser calculado mediante la expresión

$$N = n(pm + 1) \quad (5.4)$$

donde n es el número de incógnitas del problema, m el número de elementos del mallado y p es el grado del polinomio del elemento (lineal $p=1$, cuadrático $p=2$, cúbico $p=3$, etc.). Para el caso estacionario la ecuación (5.3) se reduce a

$$\tilde{T}\tilde{U} = \tilde{e} \quad (5.5)$$

donde \tilde{T} puede ser resuelta fácilmente por el método de Gauss o LU. Los elementos de la matriz \tilde{T} en su mayoría son ceros, a este tipo de matrices se les conoce como matrices dispersas para las que es mejor manejar álgebra de sistemas dispersos (Davis, 2007). En el trabajo de Domínguez, se presentan las expresiones de \tilde{T} y \tilde{e} para diferentes tipos de elementos, estas serán utilizadas en este trabajo para resolver por FEM el problema de vigas.

5.1.2. Adaptación de las ecuaciones de vigas a la ecuación general.

Para adaptar las ecuaciones de vigas a la ecuación diferencial genérica (5.1), primero se introducen las expresiones (3.10) y (3.11) en las expresiones (3.12) a (3.13), lo que resulta en

$$\begin{aligned}
\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= fx, \\
\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} &= fy, \quad y \\
\rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_z \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - Q &= m
\end{aligned} \tag{5.6}$$

donde $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$, de tal forma que

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \theta = 0. \tag{5.7}$$

Para el caso estacionario se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= fx, \\
-\frac{\partial Q}{\partial x} &= fy, \\
-\frac{\partial}{\partial x} \left(EI_z \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - Q &= m \quad y \\
\frac{\partial v}{\partial x} - \theta &= 0.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Es fácil demostrar que este sistema de ecuaciones (5.6) y (5.7) se puede obtener a partir de la ecuación (5.1) si:

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \\ Q \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

$$\tilde{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad (5.13)$$

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ m \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Con estas definiciones, el vector de flujo es

$$\tilde{v}_f = \begin{pmatrix} EA \frac{\partial u}{\partial x} \\ Q \\ EI_z \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ Q \\ M_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Las expresiones (5.9) a (5.15) están dadas en coordenadas locales de la viga, es conveniente

transformarlas a un sistema global. Para esto, se define la matriz de transformación

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

donde ϕ es el ángulo que forma el eje local de la viga con la primera dirección de los ejes globales.

Aplicando la transformación a las expresiones (5.9) a (5.15) se obtiene

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ \theta \\ Q \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

$$\tilde{M} = \tilde{R}^t \begin{pmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{R}, \quad (5.18)$$

$$\tilde{O} = \tilde{R}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{R}, \quad (5.19)$$

$$\tilde{N} = \tilde{R}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{R}, \quad (5.20)$$

$$\tilde{P} = \tilde{R}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{R} \quad y \quad (5.21)$$

$$\tilde{f} = \tilde{R}^t \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ m \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad (5.22)$$

$$\tilde{v}_f = \begin{pmatrix} N \cos \phi - Q \sin \phi \\ N \sin \phi + Q \cos \phi \\ M_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

donde U y V son los desplazamientos en x e y globales, respectivamente. El vector de flujo transformado indica que las condiciones de frontera son sobre las componentes x y y de las fuerzas internas N y Q , y sobre el momento M .

Para completar la adaptación del problema de vigas, es necesario especificar ecuaciones extras. Cuando se tienen n_v vigas que comparten un nodo como frontera, es necesario definir ecuaciones sobre el vector flujo y las incógnitas. En este trabajo, las ecuaciones son las correspondientes a uniones infinitamente rígidas y equilibrio nodal.

5.2. Programación.

Una vez definido el problema de vigas en el plano en términos de la ecuación general (5.1), es necesario escribir un código que construya la matriz \tilde{T} y el vector \tilde{e} utilizando las expresiones en la tesis de Domínguez (2015) y después resuelva el sistema (5.5), a este código le llamaremos “motor”. También, se generará un código de postproceso de los datos obtenidos del motor para encontrar las fuerzas internas. Por último, un código para el diseño de vigas basado en la especificación AISC

será escrito.

Después de escribir el motor y los códigos de postproceso y diseño, se creará una interfaz gráfica que permita al usuario capturar la información de entrada y muestre la salida amigablemente. Esta interfaz tendrá un flujo de trabajo bien definido para que sea más intuitivo para el usuario.

El software elegido para llevar a cabo las tareas anteriores es SCILAB, debido a que tiene precargada álgebra de matrices dispersas, se le pueden instalar extensiones que permiten hacer interfaces gráficas y es gratuito.

5.3. Validación.

Es de gran importancia validar el producto obtenido en este trabajo. Para ello, se compararán los resultados obtenidos por ANDIS con soluciones analíticas de una serie de problemas. Las soluciones analíticas también serán comparadas con otros software comerciales para poder evaluar el nivel de precisión y la convergencia de ANDIS. Además, se proponen problemas más complejos cuya solución obtenida por ANDIS solo es comparada de forma numérica con la de los otros software. Los software comerciales elegidos son Robot Structural Analysis Professional y COMSOL multiphysics. Para el software Robot se cuenta una licencia estudiantil, mientras que para el software COMSOL los problemas fueron modelados por el Dr. Alberto Díaz Díaz quien cuenta con una licencia de éste.



Capítulo 6

Resultados y validación

Nomenclatura




El presente capítulo está dedicado a realizar validaciones del software desarrollado ANDIS. El proceso fue inicialmente comparar las soluciones de problemas de vigas de ANDIS, Robot y COMSOL con aquellas de métodos analíticos. De esta forma, además de validar los resultados, se puede evaluar la precisión y la convergencia de los tres software. Finalmente, se realizaron comparaciones de ejemplos de mayor grado de complejidad y se compararon con otros software como lo son Robot y COMSOL.

A continuación, se presenta la nomenclatura utilizada a lo largo de la validación:

- u desplazamiento en dirección x global.
- v desplazamiento en dirección y global.
- θ rotación respecto al eje z global.
- N es la fuerza axial.
- V es la fuerza cortante.
- M_z es el momento.
- f_x es densidad de fuerza a lo largo del eje x global.

- f_y es densidad de fuerza a lo largo del eje y global.
- m es densidad de momento.
- Empotrado, empotramiento o empotrada se refiere a una condición de frontera en la cual $u=0$, $v=0$ y $\theta = 0$.
- Articulado es una condición de frontera en la cual $u=0$ y $v=0$.
- Rodillo y es una condición de frontera en la cual $u=0$.
- Rodillo x es una condición de frontera en la cual $v=0$.
- GL es el número de grados de libertad utilizados por el FEM (véase la ecuación (5.4)).
- ϵ valor máximo del error de un valor numérico relativo al valor analítico.

En la tabla 6.1, se muestran los diferentes tipos de condiciones de frontera utilizados en esta sección, su significado y su simbología.

Tipo	Condición	Símbolo
Empotrado, empotramiento o empotrada	$u=0, v=0, \theta = 0$	
Articulado o articulada	$u=0, v=0$	
Rodillo en x	$v=0$	

Cuadro 6.1: Tipos de condiciones de frontera.

6.1. Analíticos.

Esta comparación de resultados entre la solución analítica y aquellos arrojados por ANDIS son la primera forma de validación. Adicionalmente, se comparan las soluciones analíticas con aquellas del software COMSOL con la intención de mostrar que la herramienta diseñada tiene un nivel de exactitud elevado y una buena convergencia. Cabe mencionar que las soluciones analíticas fueron obtenidas directamente del manual de construcción del AISC (AISC, 2011).

6.1.1. Comprobación 1

Se desea predecir el comportamiento de la viga mostrada en la figura 6.1. La viga tiene una longitud $l = 4m$, un módulo de Young $E = 200 \times 10^9 Pa$, un segundo momento de inercia $I_z = 0.00045m^4$ y una área $A = 0.06m^2$. Sus nodos 1 y 2 están empotrado y articulado, respectivamente. Además, la viga soporta una densidad de carga $f_y = -1850N/m$

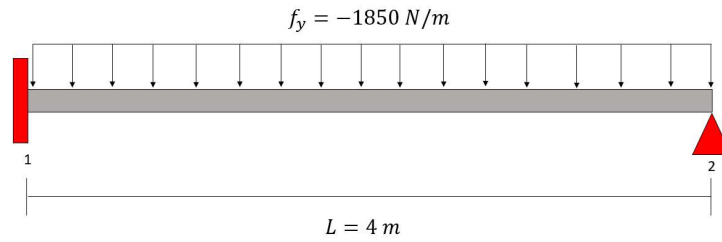


Figura 6.1: Viga propuesta para la comprobación 1 analítica.

La solución analítica de las fuerzas internas de este problema es la siguiente:

$$w = -f_y, \quad (6.1)$$

$$R_1 = \frac{3wl}{8}, \quad (6.2)$$

$$R_2 = \frac{5wl}{8}, \quad (6.3)$$

$$V(x) = R_1 - wx \quad \text{y} \quad (6.4)$$

$$M_z(x) = R_1x - \frac{wx^2}{2} \quad (6.5)$$

En las figuras 6.2 y 6.3, se muestra ϵ del cortante V y momento M_z de ANDIS y COMSOL en función de GL en el FEM. De las figuras, es posible decir que ANDIS tiene una mejor precisión que COMSOL. El error en ANDIS es prácticamente cero para ambas fuerzas internas, mientras

que el máximo del error ϵ en COMSOL es aproximadamente 15% para el momento. También, de las figuras se puede concluir que ANDIS obtiene una buena aproximación a la solución analítica aún con pocos GL. Es decir, para el problema planteado en esta comprobación, ANDIS converge a una solución de velozmente.

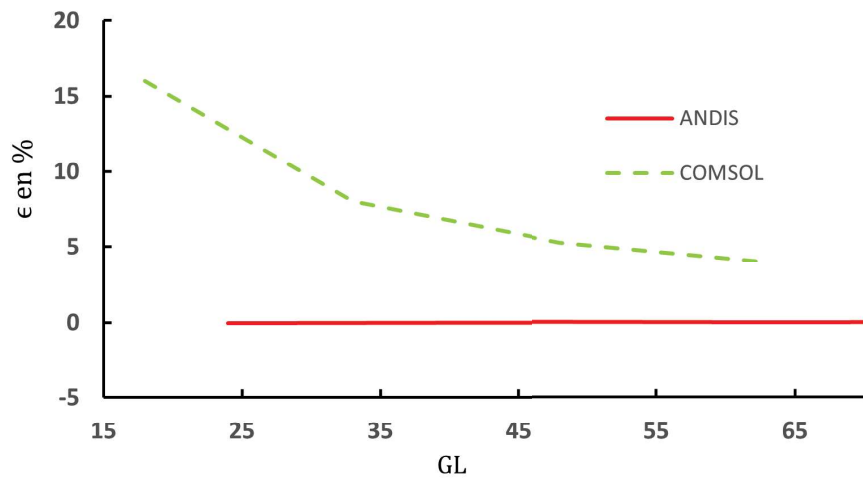


Figura 6.2: Valor de ϵ de V obtenido por ANDIS y COMSOL con diferentes GL para la comprobación 1 analítica.

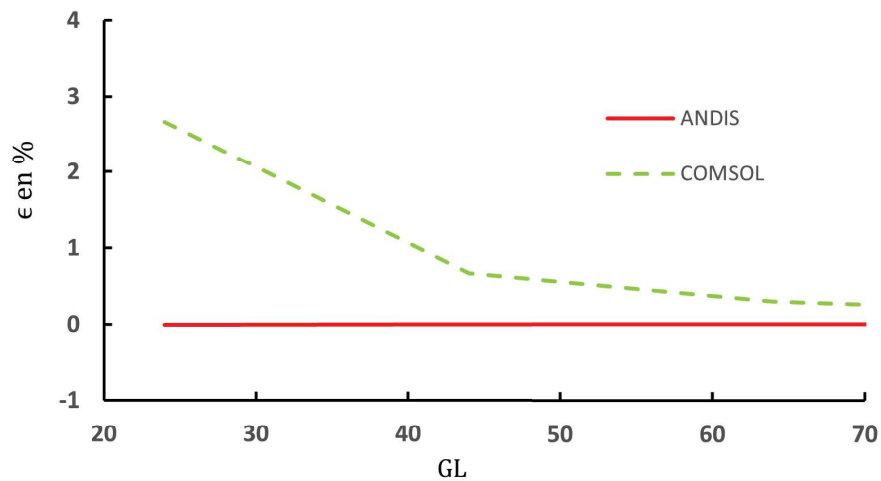


Figura 6.3: Valor de ϵ de M_z obtenido por ANDIS y COMSOL con diferentes GL para la comprobación 1 analítica.

6.1.2. Comprobación 2

En esta comprobación, se propone una viga de longitud $l = 5m$, cuyas propiedades mecánicas y geométricas son: $E = 200 \times 10^9 Pa$, $I_x = 0.00045m^4$ y $A = 0.06m^2$. La viga está sometida a dos densidades de carga $f_y = -1500N$ y $f_y = -1200N$. El nodo 1 está articulado mientras que el nodo 2 es un rodillo en x .

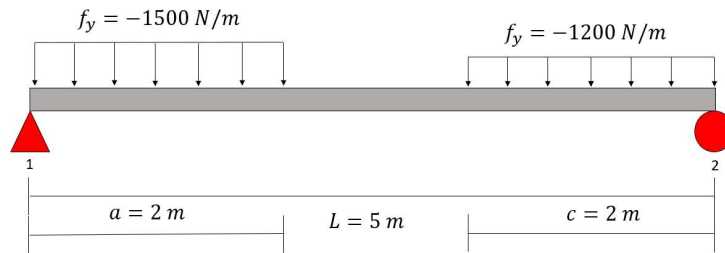


Figura 6.4: Viga propuesta para la comprobación 2 analítica.

Las fuerzas internas obtenidas de forma analítica están dadas por las siguientes expresiones:

$$w_1 = 1500N/m, \quad (6.6)$$

$$w_2 = 1200N/m, \quad (6.7)$$

$$R_1 = \frac{w_1 a(2l - a) + w_2 c^2}{2l}, \quad (6.8)$$

$$R_2 = \frac{w_2 c(2l - c) + w_1 a^2}{2l}, \quad (6.9)$$

$$V(x) = R_1 - w_1 x \quad \forall \quad x < a,$$

$$V(x) = R_1 - w_1 a \quad \forall \quad a < x < (a + b), \quad (6.10)$$

$$V(x) = R_2 - w_2(l - x) \quad \forall \quad x > (a + b),$$

$$\begin{aligned}
M_z(x) &= R_1x - \frac{w_1x^2}{2} \quad \forall x < a, \\
M_z(x) &= R_1x - \frac{w_1a}{2}(2x - a) \quad \forall a < x < (a + b) \quad \text{y} \\
M_z(x) &= R_2(l - x)\frac{w_2(l - x)^2}{2} \quad \forall x > (a + b).
\end{aligned} \tag{6.11}$$

De igual forma que en la validación anterior, se calculó ϵ de las soluciones obtenidas por los programas ANDIS y COMSOL. En la figuras 6.5 y 6.6, se graficó ϵ de V y M_z contra los grados de libertad. En la figura 6.5, se puede observar que el error presentado por COMSOL es mucho mayor que el de ANDIS para pocos grados de libertad, el cual para 25 GL está por encima del 10%. Adicionalmente, se identifica que el error presentado por ANDIS, en general, es más bajo que el error de COMSOL. En el caso de la fuerza cortante V , se puede decir que ANDIS converge con una menor cantidad de grados de libertad respecto a COMSOL. Es decir, ANDIS requiere una menor cantidad de grados de libertad para obtener resultados fiables. Respecto a la figura 6.6, se puede observar que tanto COMSOL como ANDIS presentan error por debajo del 5% y una buena convergencia.

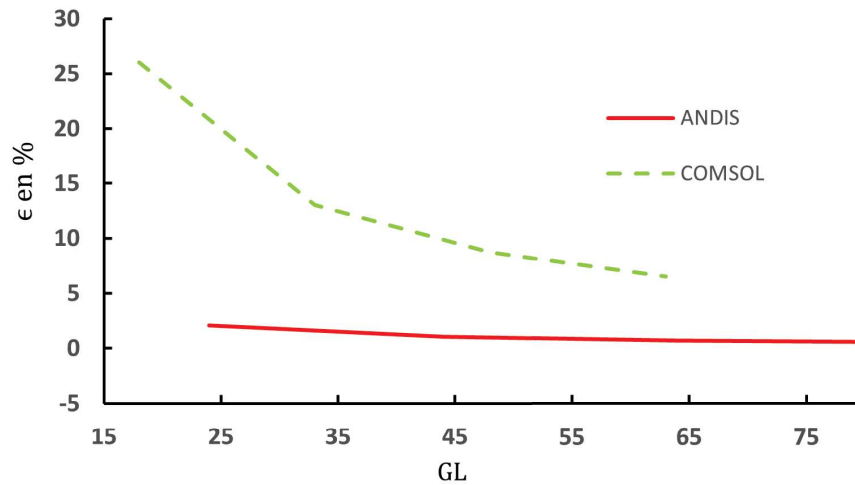


Figura 6.5: Valor de ϵ de V obtenido por ANDIS y COMSOL con diferentes GL para la comprobación 2 analítica.

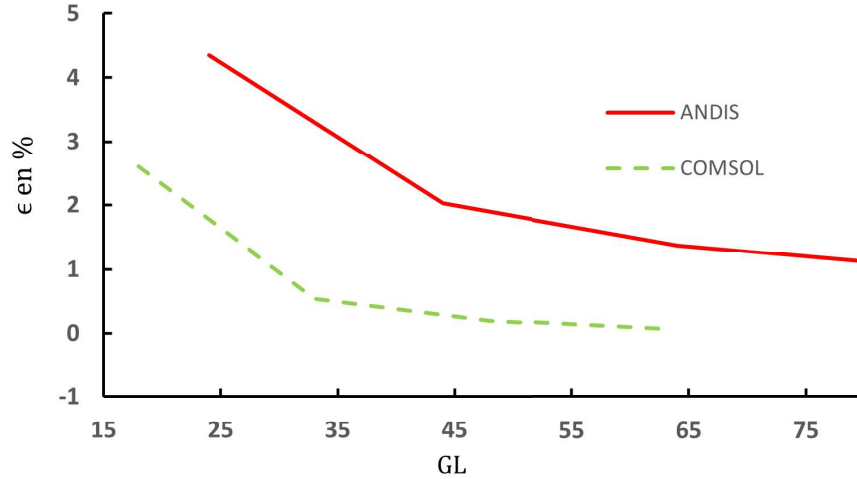


Figura 6.6: Valor de ϵ de M_z obtenido por ANDIS y COMSOL con diferentes GL para la comprobación 2 analítica.

6.1.3. Comprobación 3

La viga mostrada en la figura 6.7 cuenta con el nodo 1 articulado y rodillo x en su nodo 2, tiene una longitud $l = 5m$, se encuentra soportando una densidad de carga de $f_y = -1300N/m$, tiene un módulo de Young $E = 200 \times 10^9 Pa$, segundo momento de inercia $I_z = 0.00045m^4$ y un área $A = 0.06m^2$.

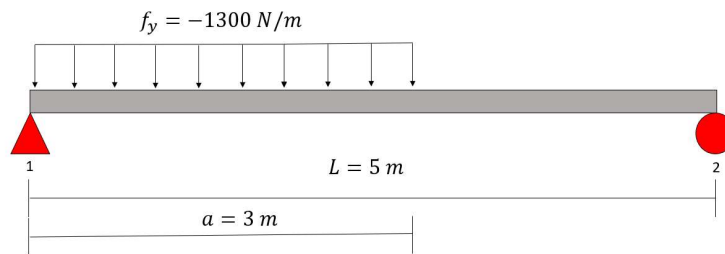


Figura 6.7: Viga para la comprobación 3 analítica.

La solución analítica de este problema es la siguiente:

$$w = 1300 N/m, \quad (6.12)$$

$$R_1 = \frac{wa}{2l}(2l - a), \quad (6.13)$$

$$R_1 = \frac{wa^2}{2l}, \quad (6.14)$$

$$V(x) = R_1 - wx \quad \forall \quad x < a, \quad (6.15)$$

$$M_z(x) = R_1x - \frac{wx^2}{2} \quad \forall \quad x < a \quad \text{y} \quad (6.16)$$

$$M_z(x) = R_2(l - x) \quad \forall \quad a < x,$$

Para evaluar a ANDIS se analizan las gráficas en las figuras 6.8 y 6.9, en las que se muestra el error ϵ para las fuerzas internas V y M_z calculadas por ANDIS Y COMSOL utilizando diferentes cantidades de GL. En este caso, ambas fuerzas internas son calculadas con mayor precisión por ANDIS cuando se utilizan pocos grados de libertad. De las figuras, también se puede decir que para el momento ambos software convergen rápidamente, mientras que para la fuerza cortante V ANDIS converge más rápido que COMSOL. Para la fuerza cortante V , COMSOL presenta un error por encima del 5% cuando ANDIS ya ha alcanzado la convergencia.

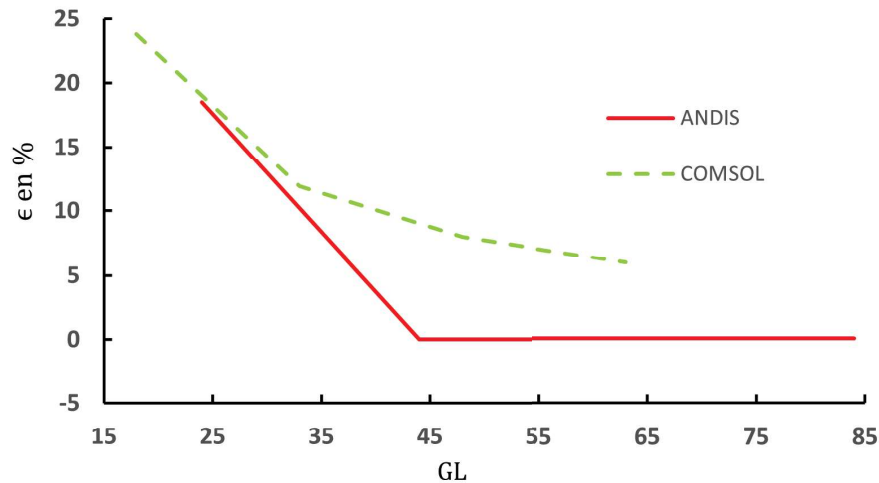


Figura 6.8: Valor de ϵ de V obtenido por ANDIS y COMSOL con diferentes GL para la comprobación 3 analítica.

En cuanto a momento:

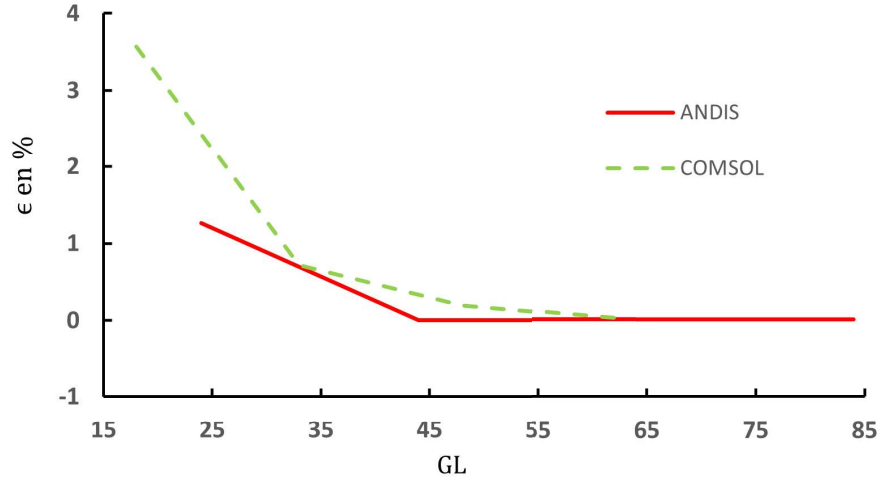


Figura 6.9: Valor de ϵ de M_z obtenido por ANDIS y COMSOL con diferentes GL para la comprobación 3 analítica.

6.1.4. Comprobación 4

Para este caso se tiene una viga simplemente apoyada con una articulación en su nodo 1 y un rodillo x en su nodo 2. La viga tiene una longitud $l = 5m$, una densidad de carga $f_y = -120x \text{ N/m}$ y tiene las propiedades: $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$, $I_z = 0.00045 \text{ m}^4$ y $A = 0.06 \text{ m}^2$.

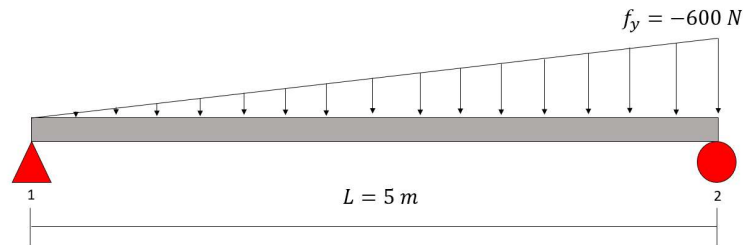


Figura 6.10: Viga para la comprobación 4 analítica.

Las fuerzas internas V y M_z están dadas por las siguientes expresiones analíticas:

$$w = 1500 \text{ N}, \quad (6.17)$$

$$R_1 = \frac{w}{3}, \quad (6.18)$$

$$R_2 = \frac{2w}{3}, \quad (6.19)$$

$$V(x) = \frac{w}{3} - \frac{wx^2}{l^2} \quad y \quad (6.20)$$

$$M_z(x) = \frac{wx}{3l^2}(l^2 - x^2). \quad (6.21)$$

En la figura 6.11, se trazan las curvas del error ϵ de COMSOL y ANDIS para el cálculo de la fuerza interna V . Para esta fuerza, ANDIS muestra mejor precisión y convergencia en comparación con el software COMSOL. Cuando el error de ANDIS es muy cercano a cero, el error de COMSOL está por encima del 5%. En la figura 6.12, referente a M_z , el error ϵ tanto de COMSOL Y ANDIS está por debajo del 3%. Sin embargo, COMSOL requiere más grados de libertad que ANDIS para alcanzar la convergencia.

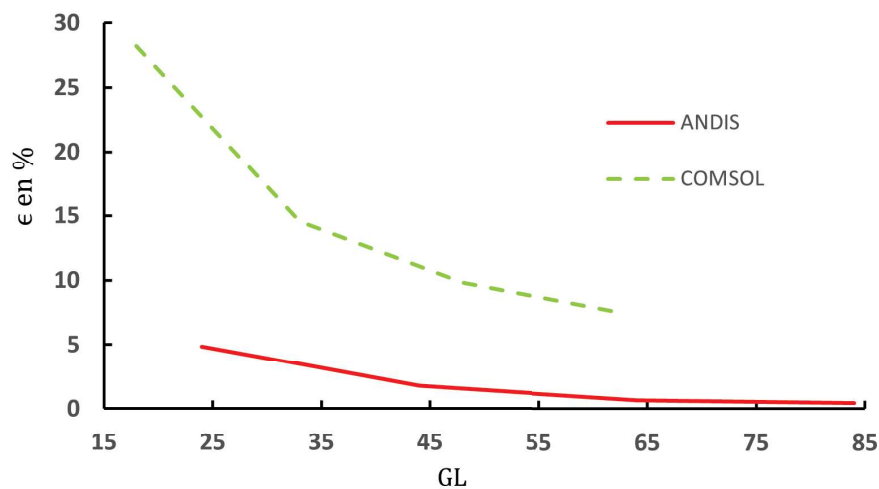


Figura 6.11: Comparación de error en el cálculo del cortante para el ejemplo 5.

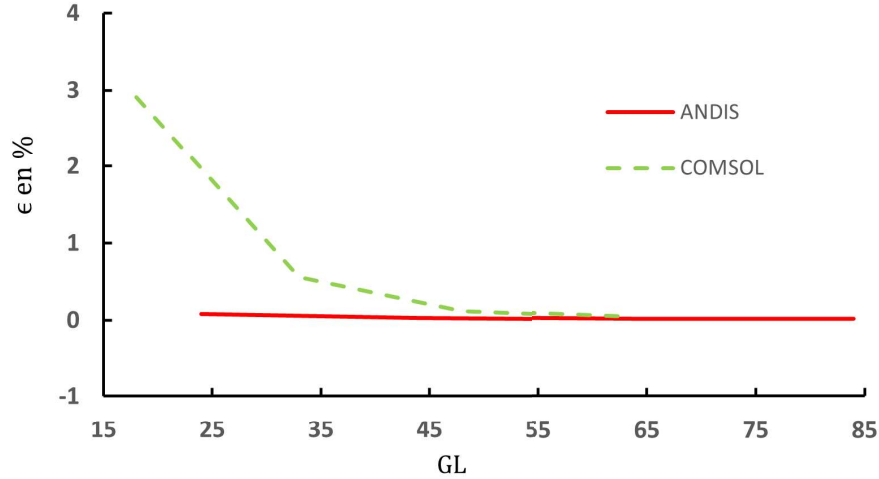


Figura 6.12: Comparación de error en el cálculo del momento para el ejemplo 5.

6.1.5. Comprobación 5

En esta comprobación, se propone un problema donde la sección transversal varía a lo largo de la viga. La viga está definida desde $x = 0 \text{ m}$ hasta $x = 5 \text{ m}$. El segundo momento de inercia está dado por

$$I_z = a + bx \text{ m}^4 \quad (6.22)$$

donde $a = 4.5000 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ y $b = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^3$. La viga está empotrada en $x = 0$, soporta una densidad de carga $f_y = -3000 \text{ N/m}$, tiene un módulo de Young $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$, como lo muestra la figura 6.13.

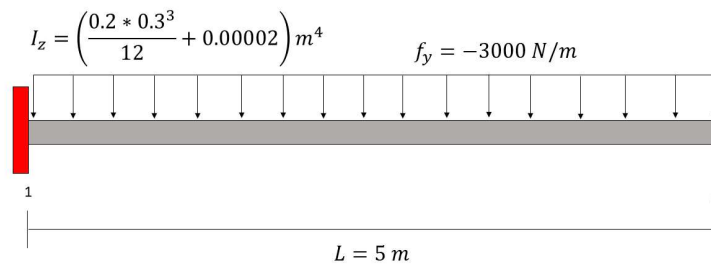


Figura 6.13: Comprobación #6.

Haciendo equilibrio externo e interno, es fácil demostrar que el cortante y el momento están

dados por las ecuaciones

$$V(x) = f_y(L - x) \quad y \quad (6.23)$$

$$M_z(x) = \frac{f_y}{2}(L - x)^2. \quad (6.24)$$

El giro se puede obtener resolviendo la ecuación (3.11), la cual se puede reescribir como

$$\theta(x) = \int \frac{M_z}{EI_z} dx. \quad (6.25)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.22) y (6.24) en la ecuación (6.25), haciendo la integral y aplicando la condición $\theta(0) = 0$ se obtiene

$$\theta = \frac{f_y}{2Eb} \left\{ \left[\ln \left(\frac{a + bx}{a} \right) \right] \left(L + \frac{a}{b} \right)^2 - x \left(2L + \frac{a}{b} \right) + \frac{x^2}{2} \right\}. \quad (6.26)$$

De la ecuación (3.3) se puede deducir que

$$v = \int \theta dx. \quad (6.27)$$

Realizando esta integral y aplicando la condición de frontera $v = 0$ se llega a la expresión

$$v = \frac{f_y}{2Eb} \left\{ \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 (2L + \frac{a}{b})}{2} + \left(L + \frac{a}{b} \right)^2 \left[\frac{a}{b} + \left(x + \frac{a}{b} \right) \left(\ln \left(\frac{a + bx}{a} \right) - 1 \right) \right] \right\}. \quad (6.28)$$

Las soluciones al problema aquí descrito de ANDIS, COMSOL y la analítica son presentadas en las figuras 6.14 a 6.17. Las soluciones de los software mostradas en estas figuras alcanzaron la convergencia. ANDIS y COMSOL aproximan de forma excelente los desplazamientos v y θ y la fuerza M_z , pero es evidente que COMSOL tiene problemas con la fuerza interna V (véase figura 6.17). La gran diferencia al calcular la fuerza V de COMSOL respecto a la solución analítica se debe a su forma de calcularla, el software utiliza la expresión

$$V = -EI_{zz} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (6.29)$$

Sin embargo, de las de equilibrio de vigas mostradas en (5.8), se demuestra que la forma correcta

de calcular V es

$$V = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI_{zz}\theta). \quad (6.30)$$

Por lo tanto, ANDIS es una herramienta más confiable en el cálculo de la fuerza cortante que COMSOL. Esto también explica porque ANDIS calcula con mayor precisión el cortante V que COMSOL en las comprobaciones mostradas anteriormente.

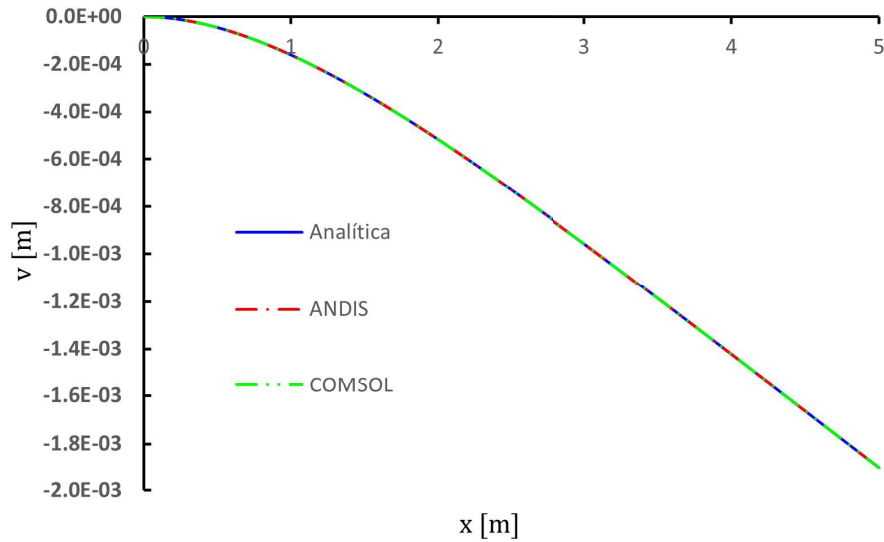


Figura 6.14: Comparación del desplazamiento en v del ejemplo 12.

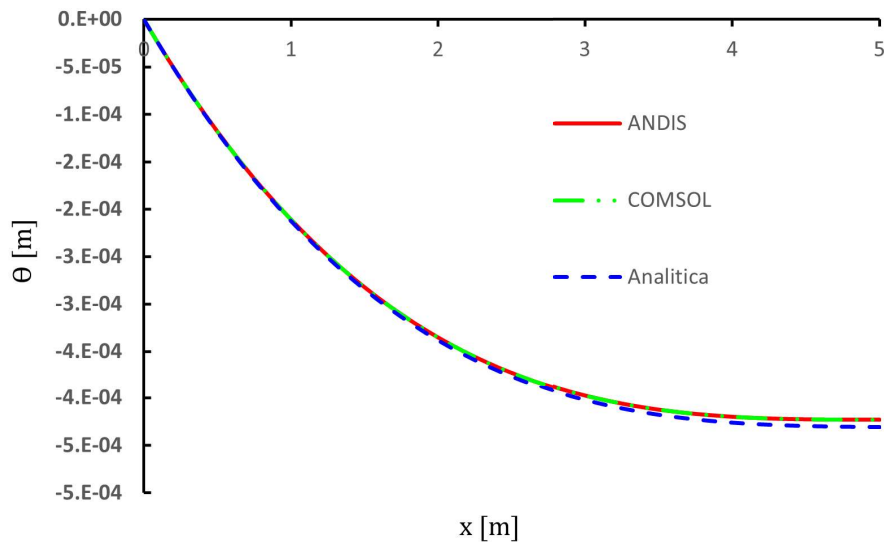


Figura 6.15: Comparación de la rotación θ del ejemplo 12.

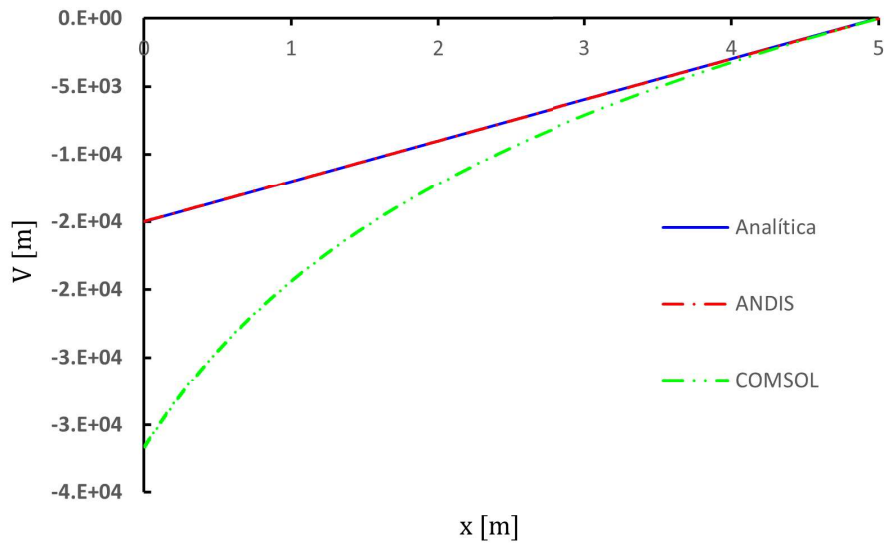


Figura 6.16: Comparación de fuerza cortante del ejemplo 12.

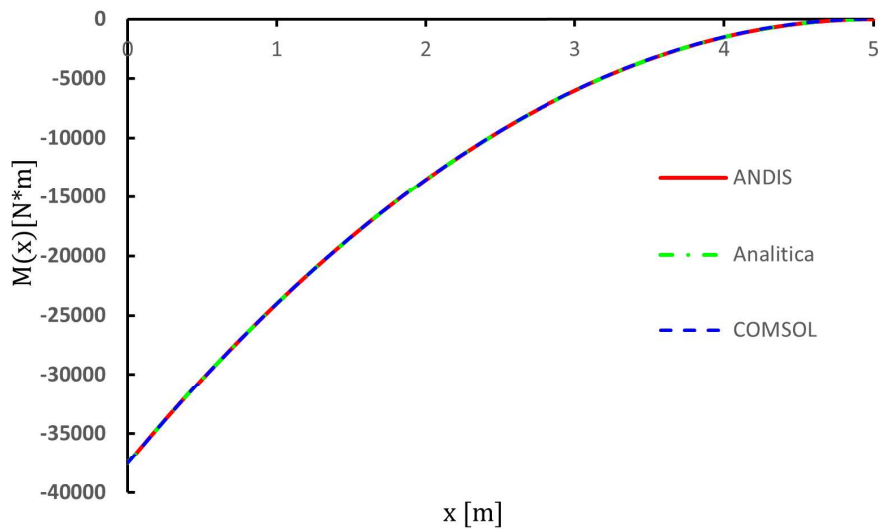


Figura 6.17: Comparación de momento del ejemplo 12.

6.2. Numéricos

Esta comparación de resultados entre los tres software ANDIS, COMSOL y ROBOT. Se comparan resultados de los desplazamientos en u , v , la rotación al rededor del eje z llamada θ , y los diagramas de fuerzas internas Axial, Cortante y Momento de los ejemplos escogidos, con la intención de probar la potencia y exactitud de la herramienta diseñada con ejercicios de mayor dificultad, y como este se comporta al lado de dos software comerciales del mercado.

6.2.1. Comprobación 1

Para esta comprobación, se propone una viga con una parte de ella inclinada y la otra horizontal, como es indicado en la figura 6.18, cuyas propiedades mecánicas y geométricas son: $E = 200 \times 10^9 Pa$, $I_z = 0.00071 m^4$ y $A = 0.07 m^2$ para ambos tramos de la viga. Esta viga está sometida a dos densidades de carga $f_y = -1500 N/m$ y $f_y = -1750 N/m$.

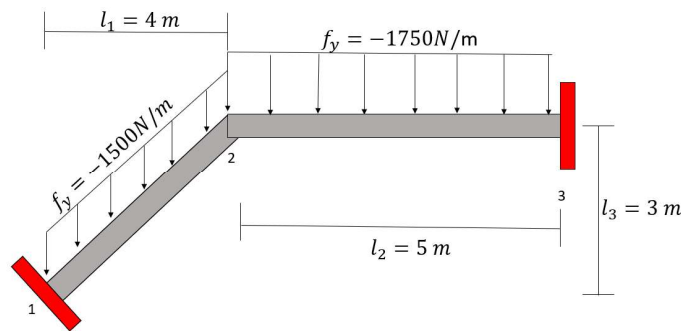


Figura 6.18: Comprobación #1

Se calcularon los desplazamientos en u , v , y θ como es ilustrado en las figuras 6.19 a 6.21, en donde es evidente que los resultados arrojados por COMSOL y ANDIS tienen valores muy similares, presentando una ligera discordancia con los resultados entregados por ROBOT. En cuanto a los valores de fuerzas internas para el sistema analizado, $A(x)$, $V(x)$ y $M(x)$, en las figuras 6.22 a 6.24, se evidencia que los resultados entregados por los software COMSOL y ROBOT presentan variaciones mínimas en comparación con los resultados entregados por el software ANDIS

Desplazamiento en u .

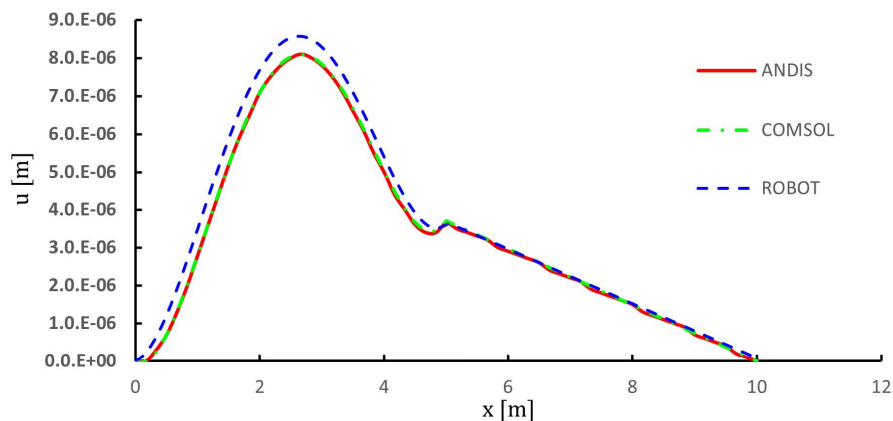


Figura 6.19: Valor de u obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 1 numérica

Desplazamiento en v .

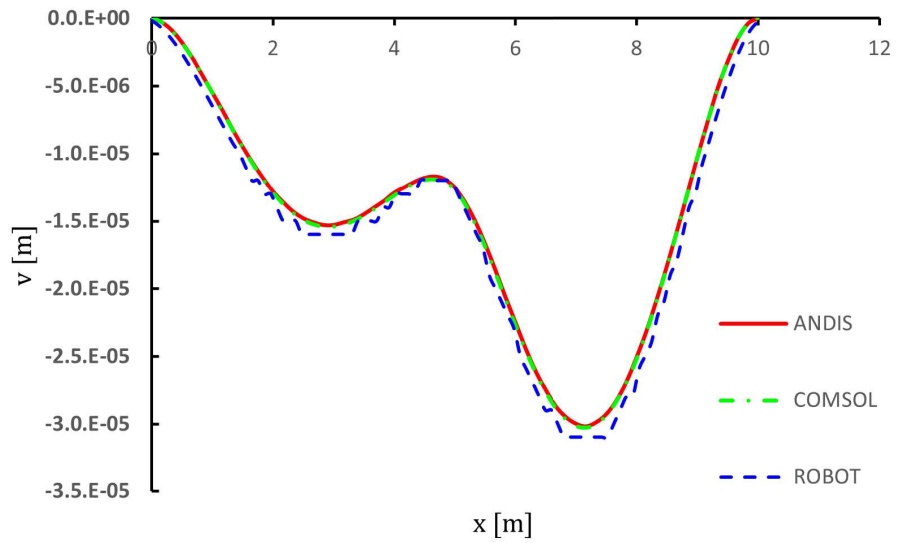


Figura 6.20: Valor de v obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 1 numérica

Rotación θ .

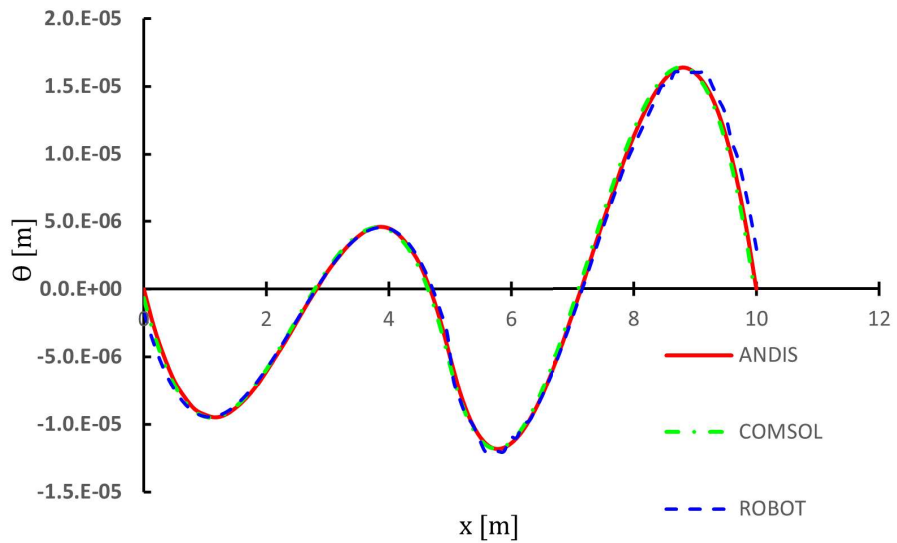


Figura 6.21: Valor de θ obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 1 numérica

Fuerza axial.

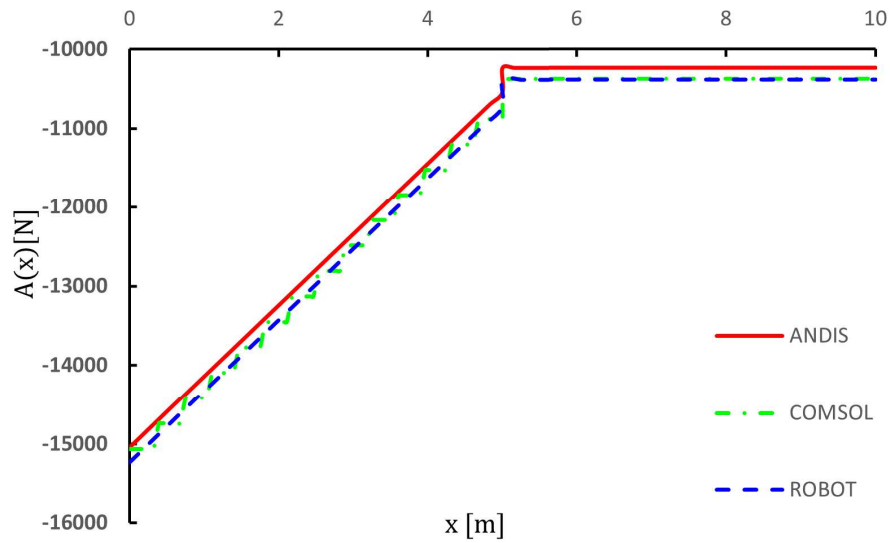


Figura 6.22: Valor de carga axial obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 1 numérica

Fuerza cortante.

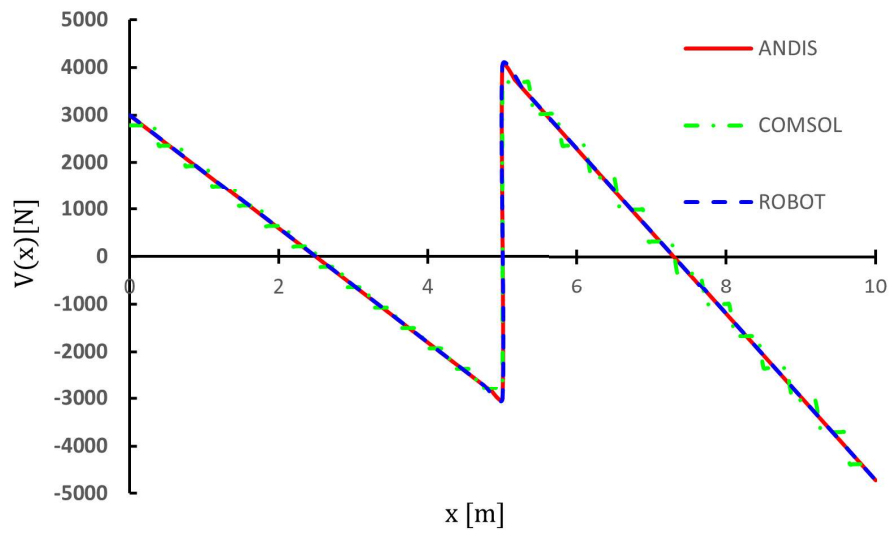


Figura 6.23: Valor de fuerza cortante obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 1 numérica

Momento.

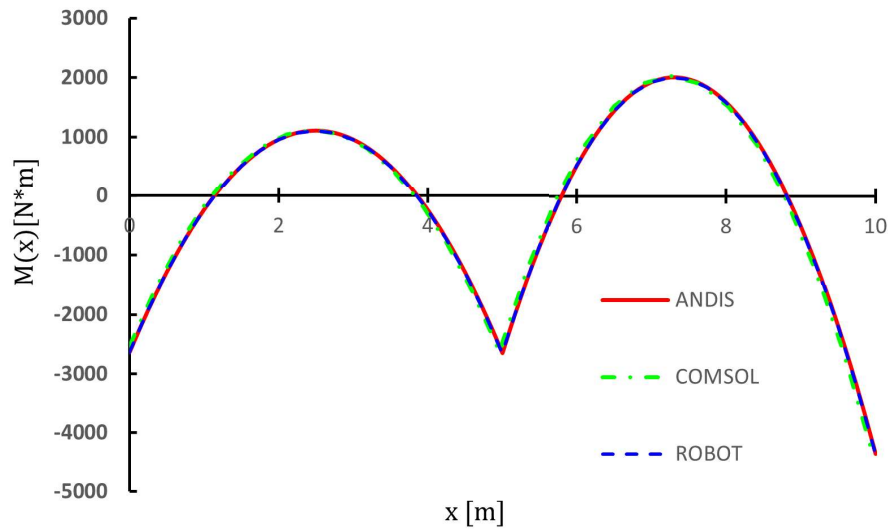


Figura 6.24: Valor de momento obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 1 numérica

6.2.2. Comprobación 2

La siguiente comprobación se realizó con un marco de un nivel, en donde los elementos verticales tienen una longitud $l = 4m$ y el elemento horizontal $l = 2m$, con las siguientes propiedades geométricas y mecánicas $E = 200 \times 10^9 Pa$, $I_z = 0.00071m^4$ y $A = 0.07m^2$ para todos los elementos, las cargas aplicadas a cada uno de los elementos esta representada en la figura 6.25.

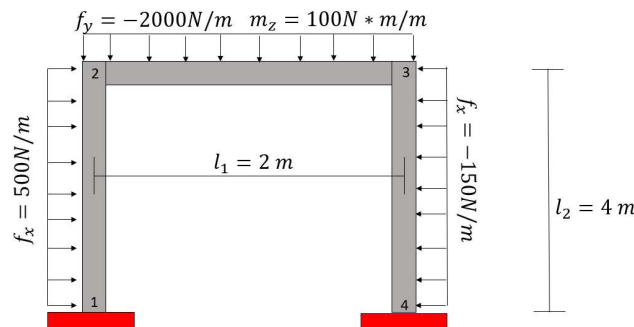


Figura 6.25: Comprobación #2.

Al igual que en la comprobación 1, se calcularon los desplazamientos en u , v , y θ como es ilustrado en las figuras 6.26 a 6.28, en donde es evidente que los resultados arrojados por COMSOL y ANDIS tienen valores muy similares, presentando una ligera discordancia con los resultados entregados por ROBOT. Esto muy similar al resultado de la comprobación anterior, sin embargo,

en esta caso para el resultado de desplazamiento u se puede observar que el comportamiento de la línea del gráfico de los software COMSOL y ROBOT se alejan de forma opuesta del resultado entregado por ANDIS. En cuanto a los valores de fuerzas internas para el sistema analizado, $A(x)$, $V(x)$ y $M(x)$, en las figuras 6.29 a 6.31, se evidencia que los resultados entregados por los software COMSOL y ROBOT presentan variaciones superiores a las presentadas en el ejemplo anterior, de lo cual se puede concluir que a medida que se hace mas complejo un sistema, la precisión de ANDIS sigue superando la de los otros software.

Desplazamiento en u .

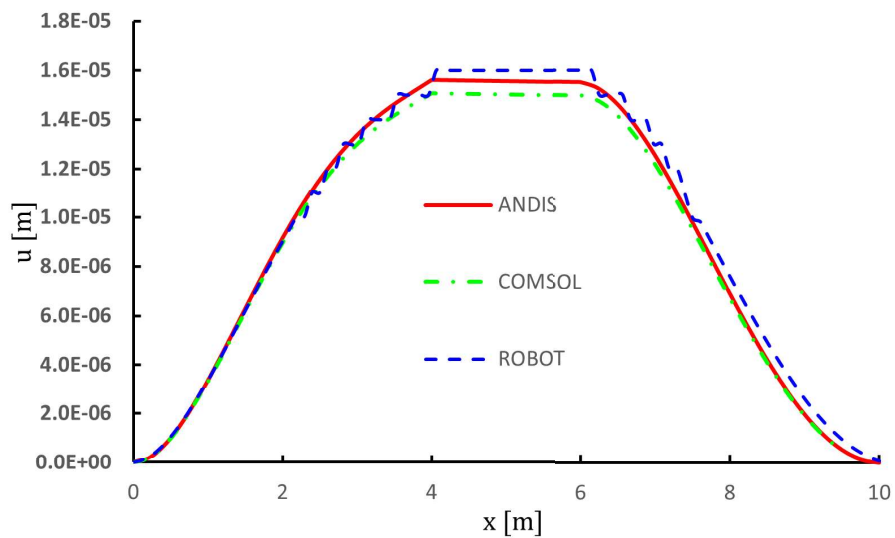


Figura 6.26: Valor de u obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 2 numérica

Desplazamiento en v .

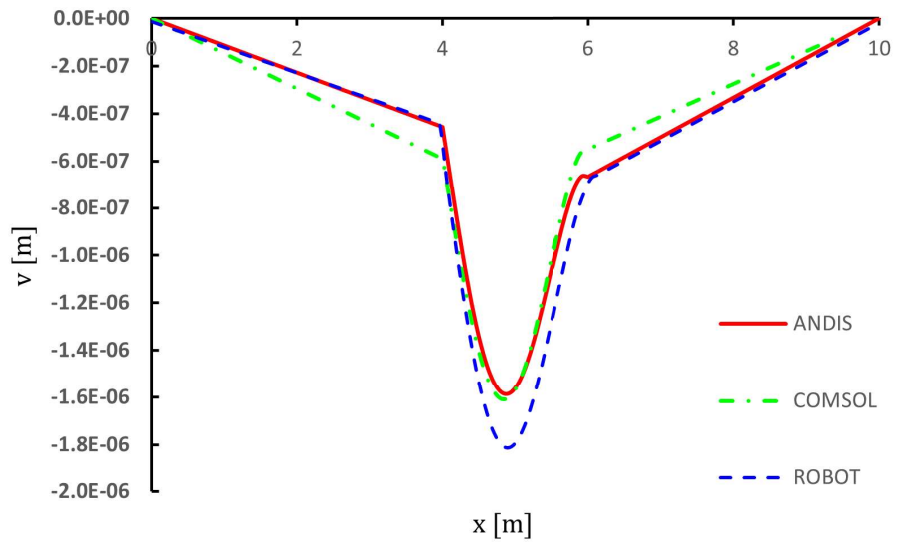


Figura 6.27: Valor de v obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 2 numérica

Rotación θ .

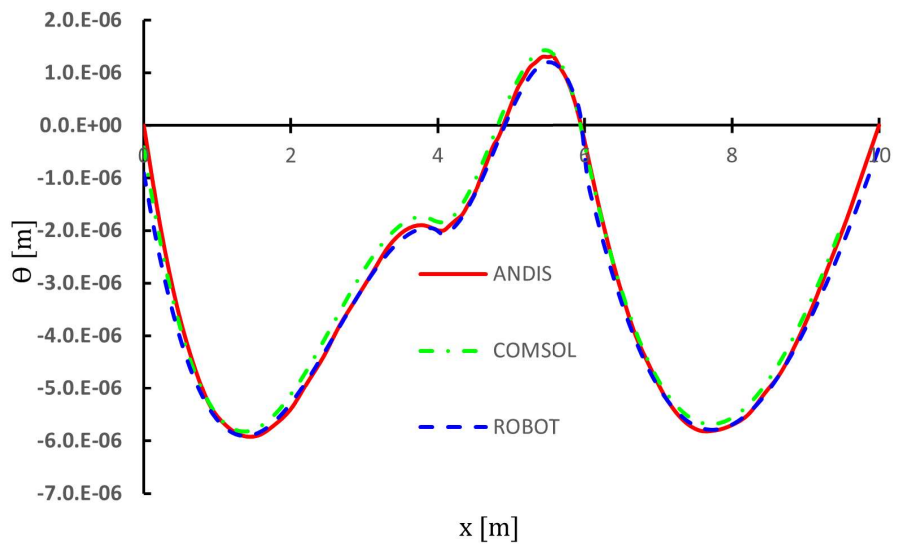


Figura 6.28: Valor de θ obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 2 numérica

Fuerza axial.

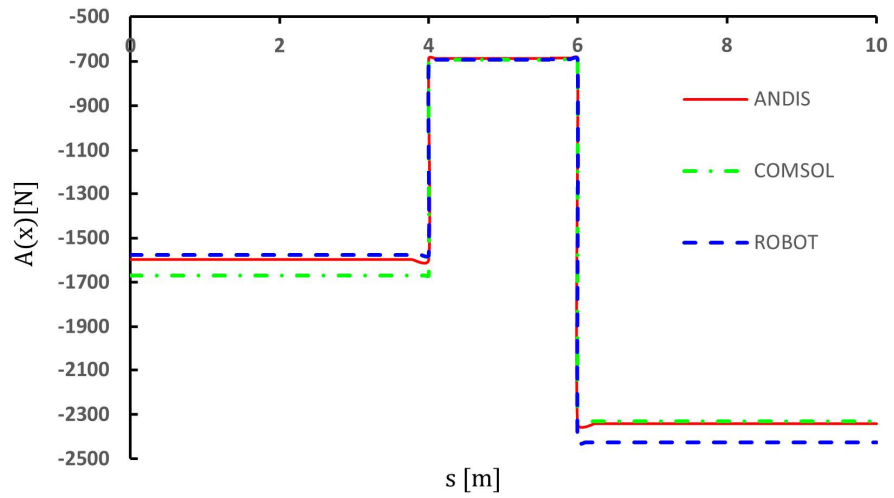


Figura 6.29: Valor de fuerza axial obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 2 numérica

Fuerza cortante.

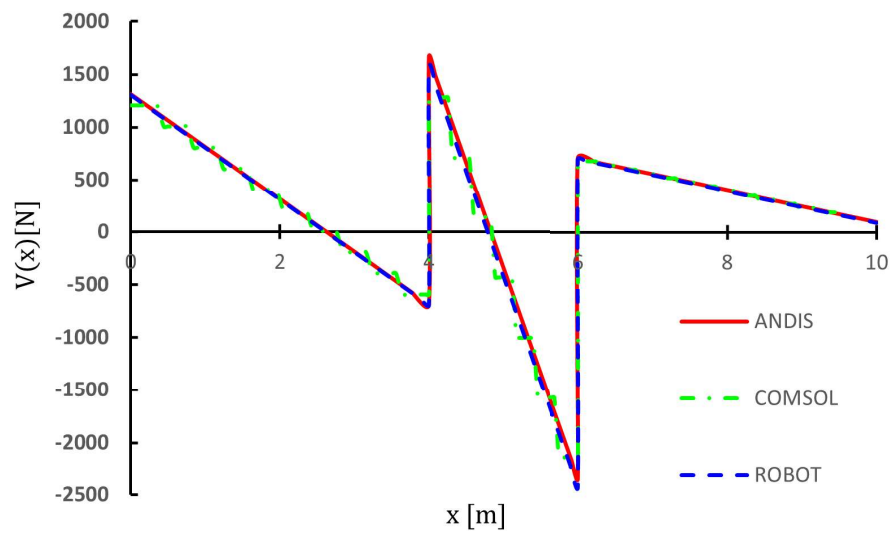


Figura 6.30: Valor de fuerza cortante obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 2 numérica

Momento.

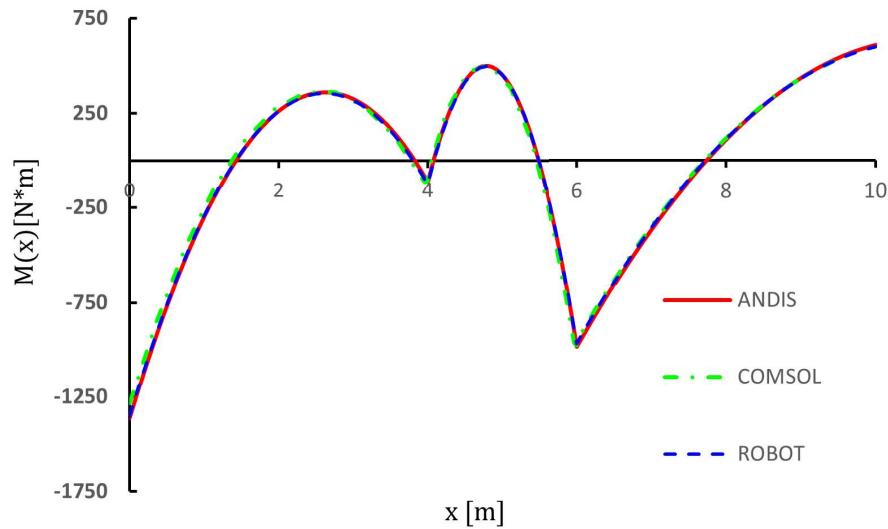


Figura 6.31: Valor de momento obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 2 numérica

6.2.3. Comprobación 3

Para la comprobación final, se analizó un sistema de dos vigas inclinadas, cuyas propiedades geométricas y mecánicas son las siguientes: $E = 200 \times 10^9 Pa$, $I_z = 0.00071 m^4$ y $A = 0.07 m^2$. Estos elementos soportan una carga puntual en su conexión de $f_y = -6000 N$ como se indica en la figura 6.32.

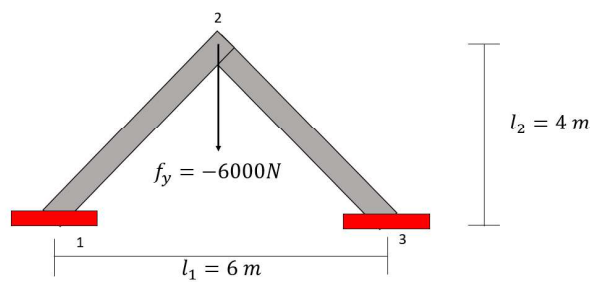


Figura 6.32: Comprobación 3.

Se calcularon los desplazamientos en u , v , y θ como es ilustrado en las figuras 6.33 a 6.35, en donde es evidente que los resultados arrojados por COMSOL y ANDIS tienen valores muy similares, presentando una ligera discordancia con los resultados entregados por ROBOT. En cuanto a los valores de fuerzas internas para el sistema analizado, $A(x)$, $V(x)$ y $M(x)$, en las figuras 6.36 a 6.38,

se evidencia variación significativa en los valores respectivos para la carga axial, resultados donde mas se diferencian los 3 software en las 3 comprobaciones realizadas con ejercicios numéricos. En cuanto cortante y momento, los resultados de los 3 software son muy similares.

Desplazamiento en u .

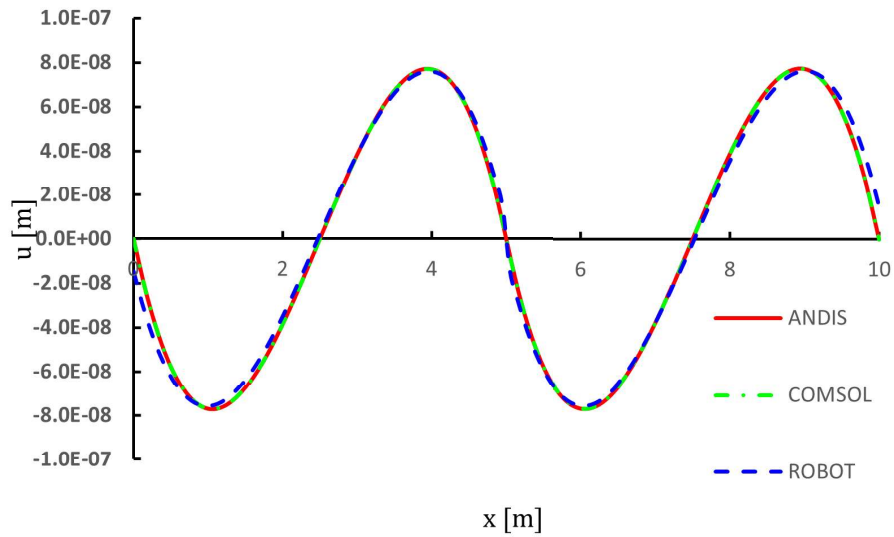


Figura 6.33: Valor de u obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 3 numérica

Desplazamiento en v .

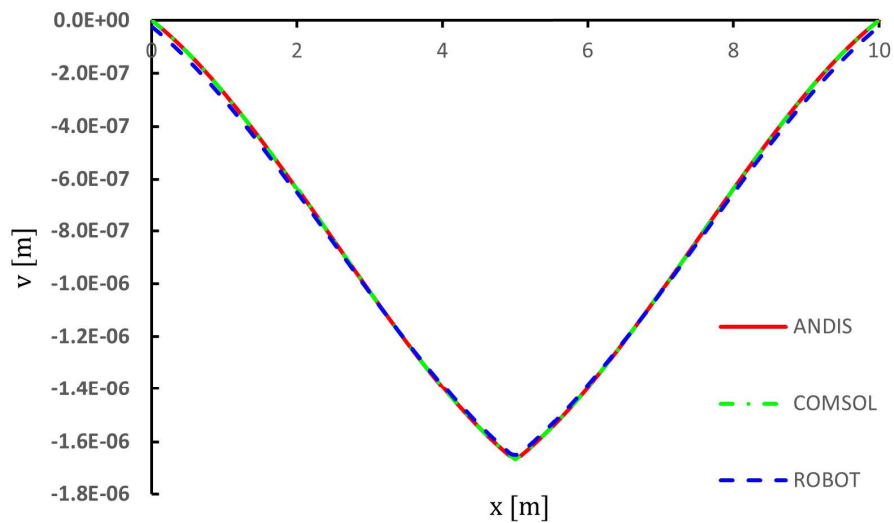


Figura 6.34: Valor de v obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 3 numérica

Rotación θ .

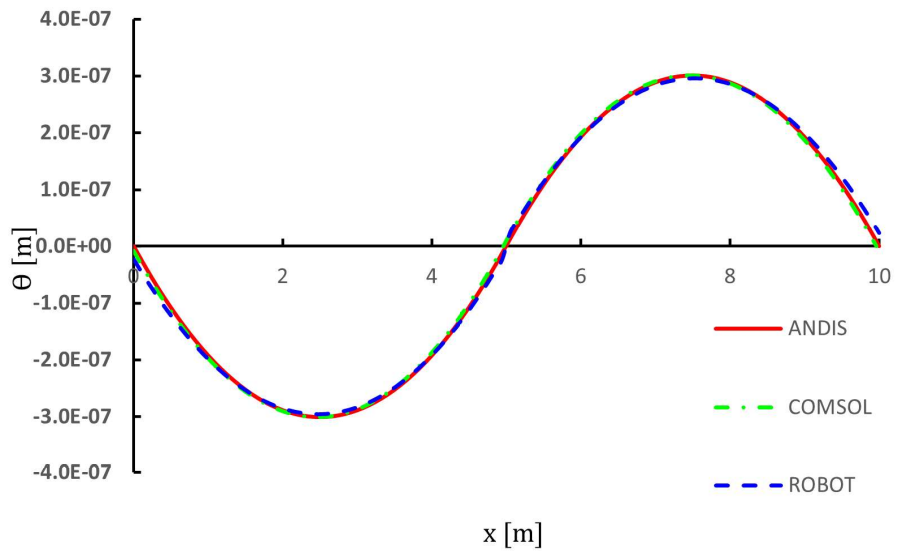


Figura 6.35: Valor de θ obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 3 numérica

Fuerza axial.

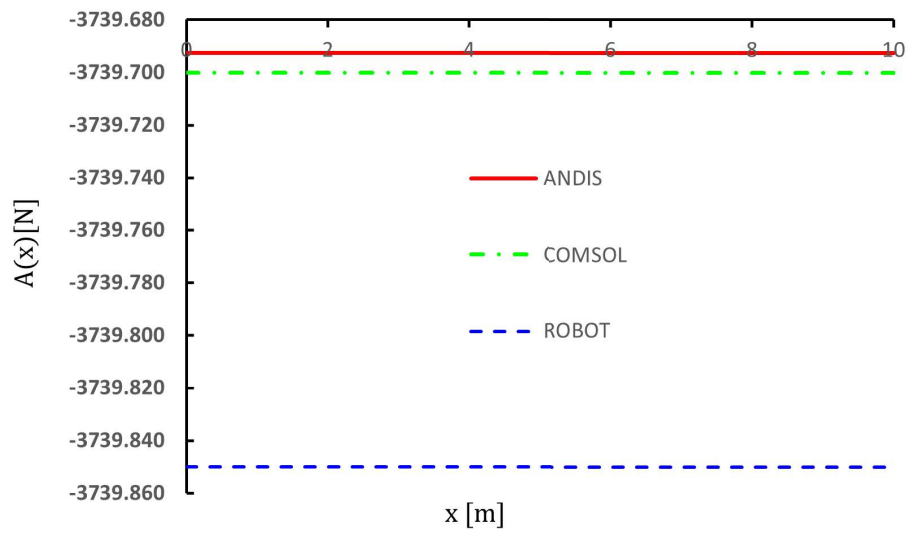


Figura 6.36: Valor de fuerza axial obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 3 numérica

Fuerza cortante.

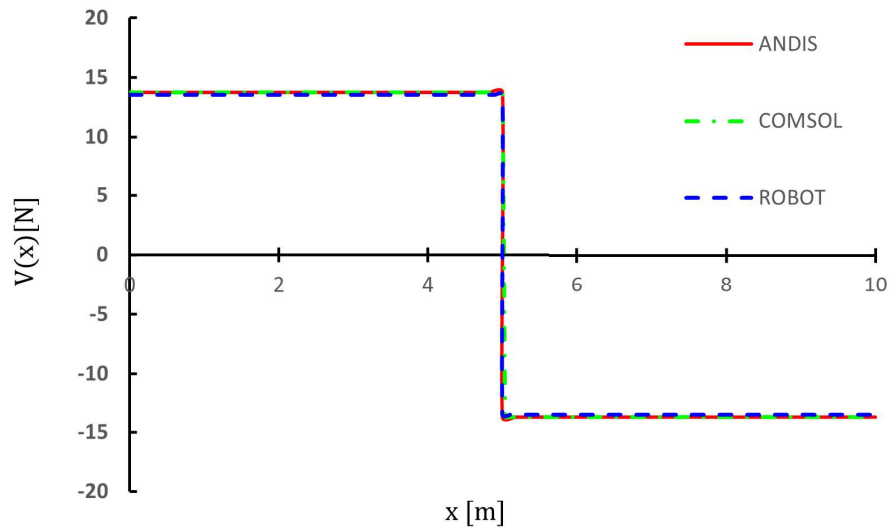


Figura 6.37: Valor de fuerza cortante obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 3 numérica

Momento.

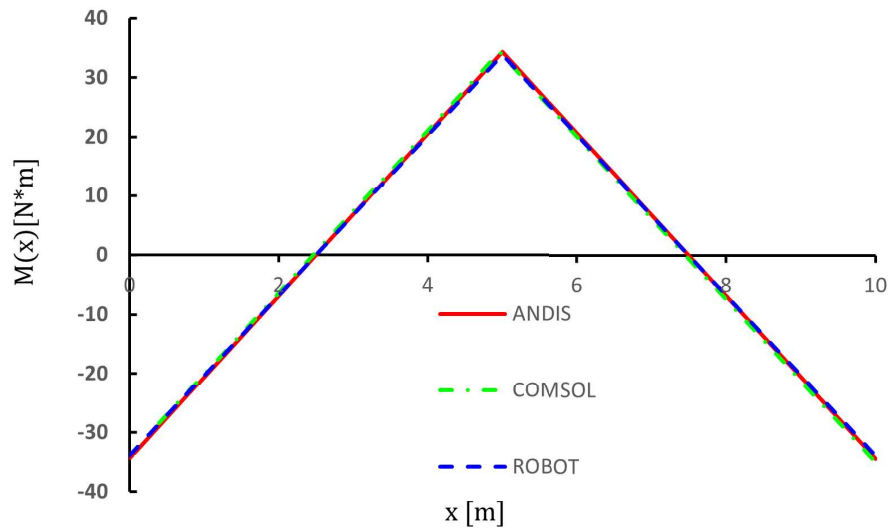


Figura 6.38: Valor de momento obtenido por ANDIS, COMSOL y ROBOT para la comprobación 3 numérica

6.3. Marco de tres niveles

Como última validación, se realizó un análisis de un marco de tres niveles, con altura máxima de $9m$, y un ancho del marco de $5m$, adicionalmente se agregó en el nodo 2 una carga puntual de

$f_x = 2000N$ y $f_y = -1000N$, y en las vigas 2, 3, 4 una carga lineal de $f = 3000N$ en sentido de la gravedad. Todas las vigas del ejercicio se supusieron de la misma sección transversal, con área de $A = 0.04m^2$, inercia de $I = 0.0001333m^4$ y un módulo de Young de $E = 200 \times 10^9 Pa$, como es mostrado en la siguiente figura:

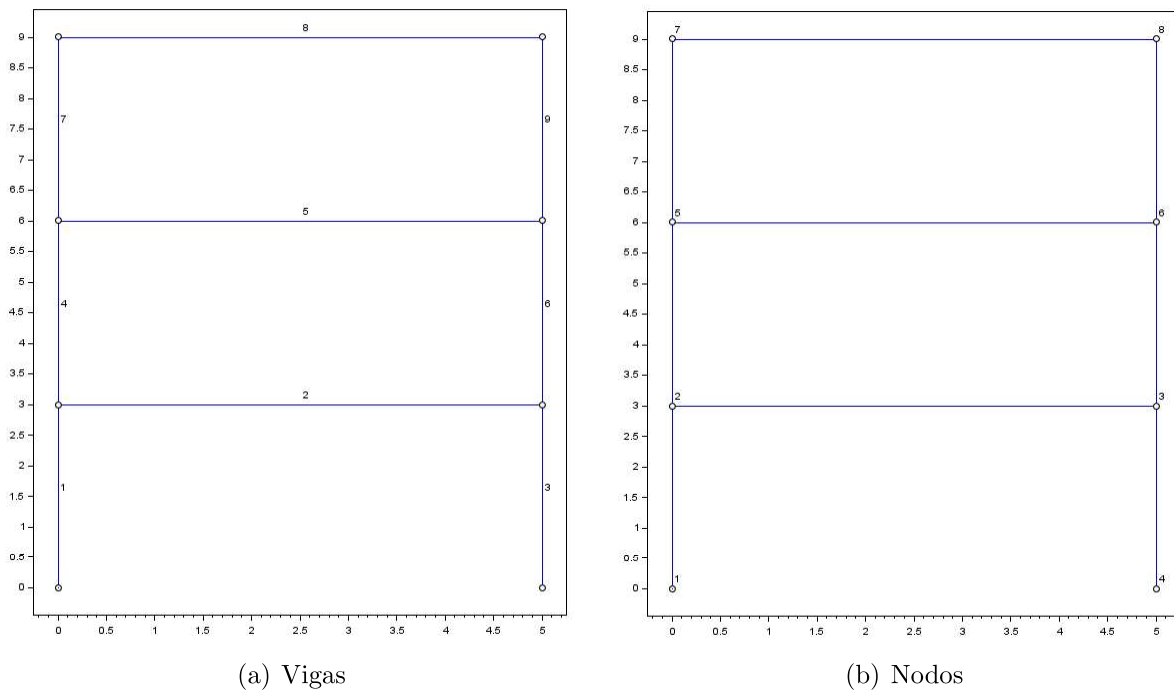


Figura 6.39: Modelo a analizar con ANDIS.

Con la intención de conocer el funcionamiento del ANDIS, se mostrará paso a paso la forma en la que se realizará la modelación de la figura 6.39, y al cabo de realizar el análisis, los desplazamientos obtenidos se compararan con desplazamientos obtenidos por Robot Structural Analysis y Comsol.

En primer lugar, se realiza la generación de la geometría como se muestra en la figura 6.40

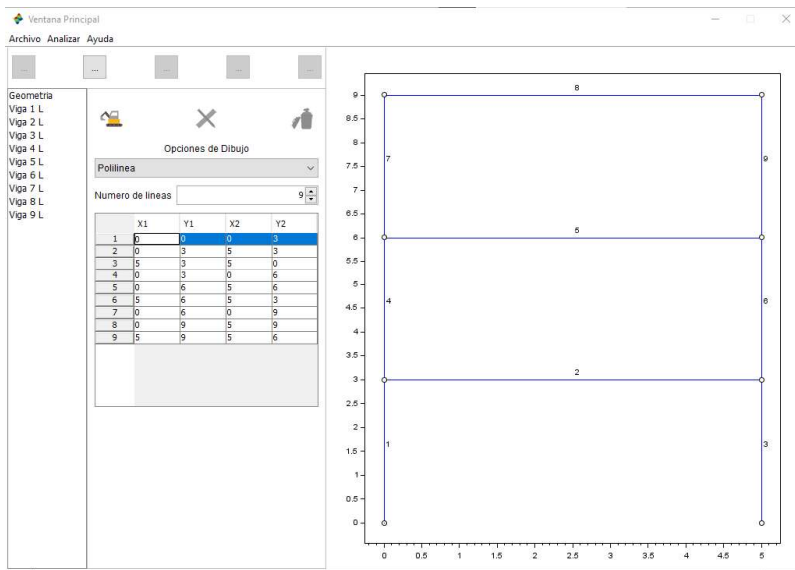


Figura 6.40: Creando geometría en ANDIS.

Posteriormente se genera la sección transversal como en la figura 6.41

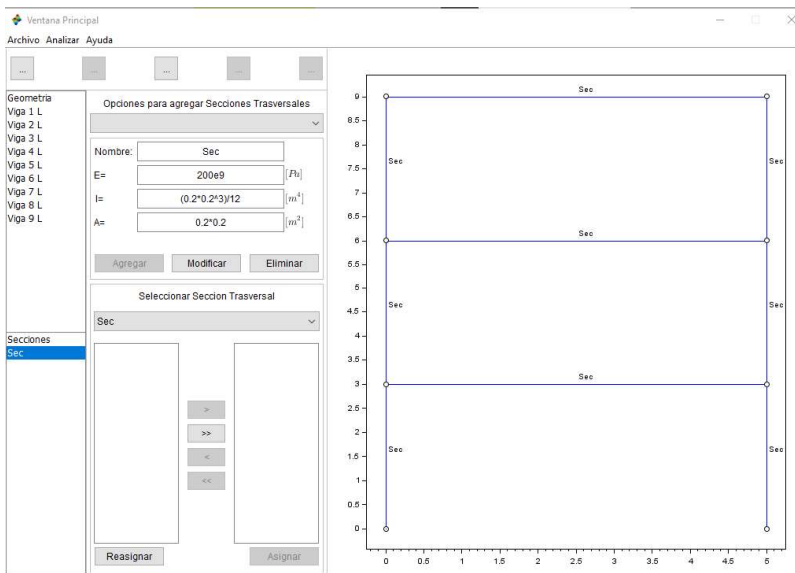


Figura 6.41: Creando sección transversal en ANDIS.

A continuación, la creación y asignación de las cargas en las figuras 6.42 a la 6.45

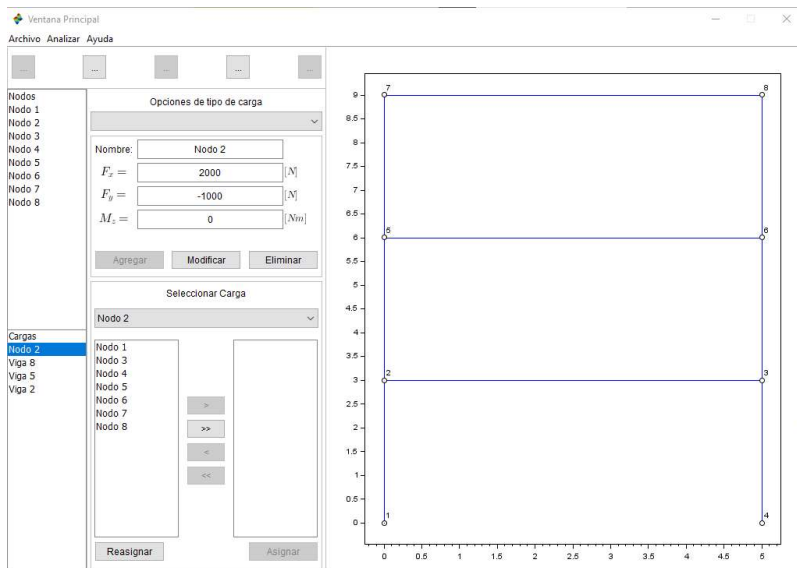


Figura 6.42: Creando carga en el nodo 2 en ANDIS.

Viga 2.

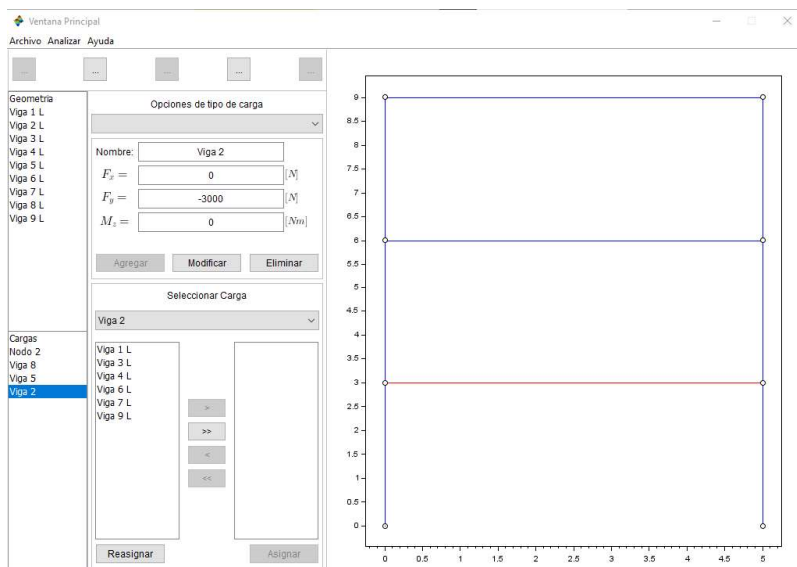


Figura 6.43: Creando carga en la viga 2 en ANDIS.

Viga 5.

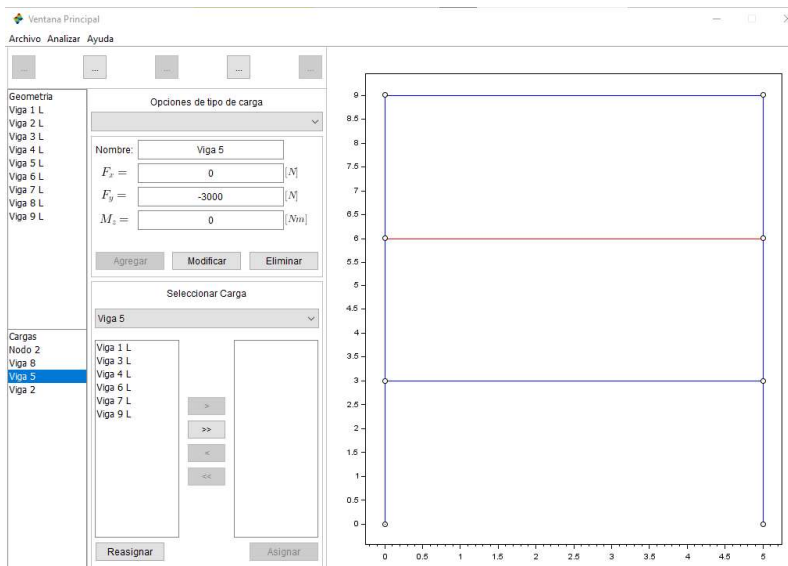


Figura 6.44: Creando carga en la viga 5 en ANDIS.

Viga 8

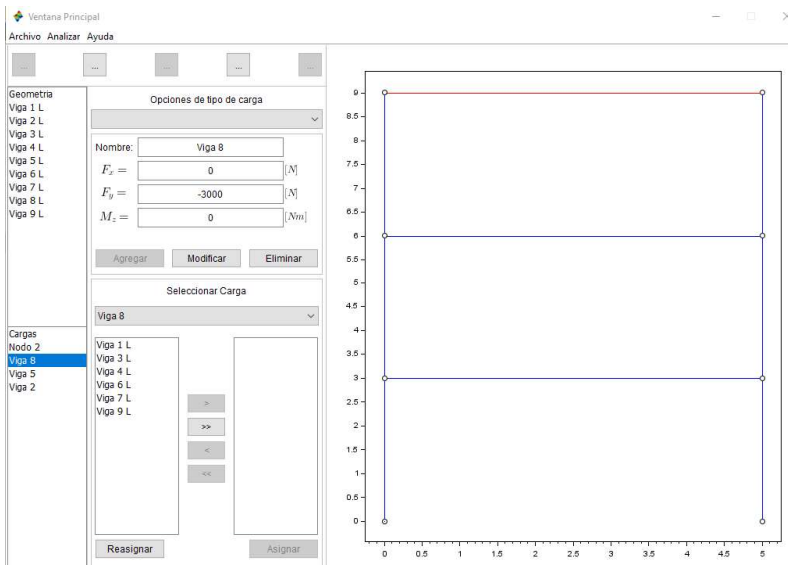


Figura 6.45: Creando carga en la viga 8 en ANDIS.

Siguiente se asignan los apoyos a los nodos que llevan los mismos como se muestra en la figura

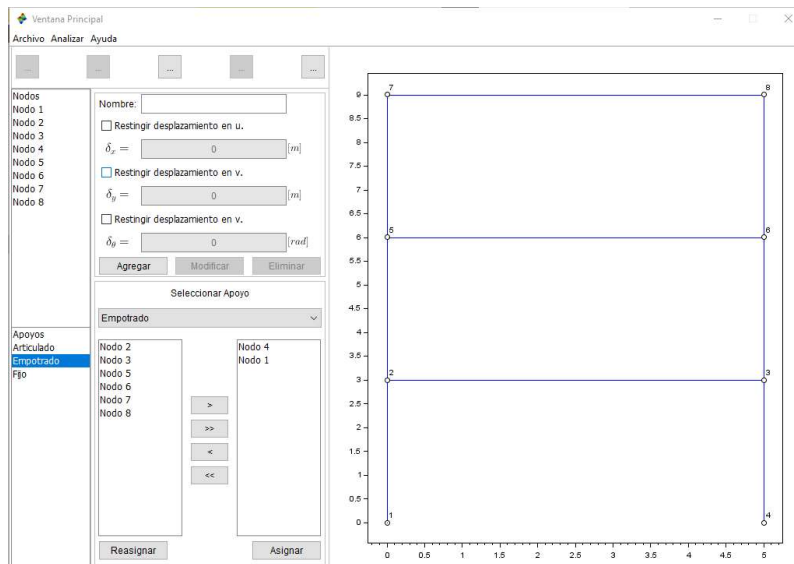


Figura 6.46: Asignación de apoyos en ANDIS.

Finalmente se asigna el mallado a cada elemento y se corre el análisis.

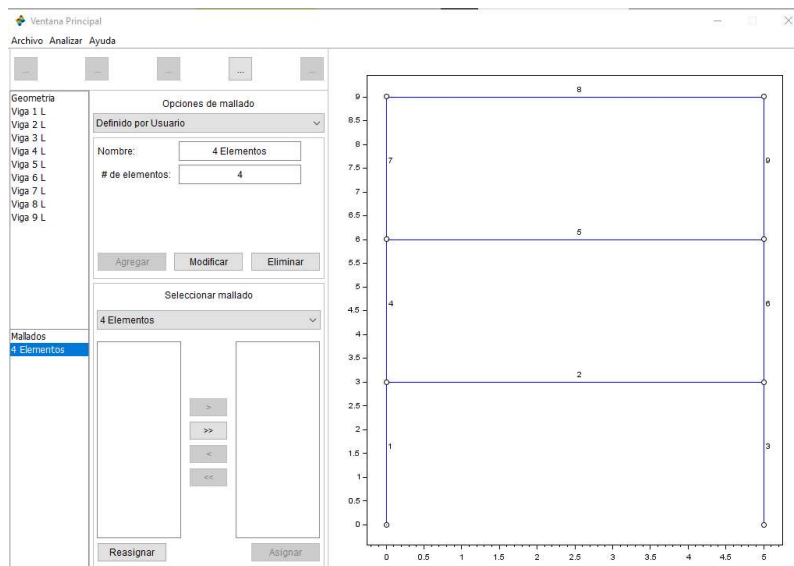


Figura 6.47: Asignación del mallado a las vigas en ANDIS.

Los resultados fueron tabulados y comparados tanto numéricamente como de forma gráfica contra los otros dos software mencionados anteriormente al inicio del capítulo, los resultados numéricos se encuentran en la tabla 6.2 y la comparación gráfica está en la figura 6.48

Cuadro 6.2: Comparación de desplazamientos en los nodos

Elemento	ANDIS			ROBOT			COMSOL		
	u	v	θ	u	v	θ	u	v	θ
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1.3127e-04	-8.5332e-06	-9.9922e-05	1.3300e-04	-8.6290e-06	1.0100e-04	1.3124e-04	-8.6291e-06	-9.9904e-05
3	1.3104e-04	-8.6209e-06	3.7549e-05	1.3200e-04	-8.6210e-06	-3.8000e-05	1.3101e-04	-8.6209e-06	3.7566e-05
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1.8639e-04	-1.4060e-05	-4.0921e-05	1.8800e-04	-1.4000e-05	4.2000e-05	1.8629e-04	-1.4220e-05	-4.0891e-05
6	1.8697e-04	-1.4280e-05	2.9259e-05	1.8800e-04	-1.4000e-05	-3.0000e-05	1.8687e-04	-1.4280e-05	2.9289e-05
7	1.9826e-04	-1.6835e-05	-1.2348e-04	2.0000e-04	-1.7000e-05	1.2400e-04	1.9806e-04	-1.7027e-05	-1.2344e-04
8	1.9652e-04	-1.7098e-05	1.2086e-04	1.9800e-04	-1.7000e-05	-1.2200e-04	1.9632e-04	-1.7098e-05	1.2089e-04

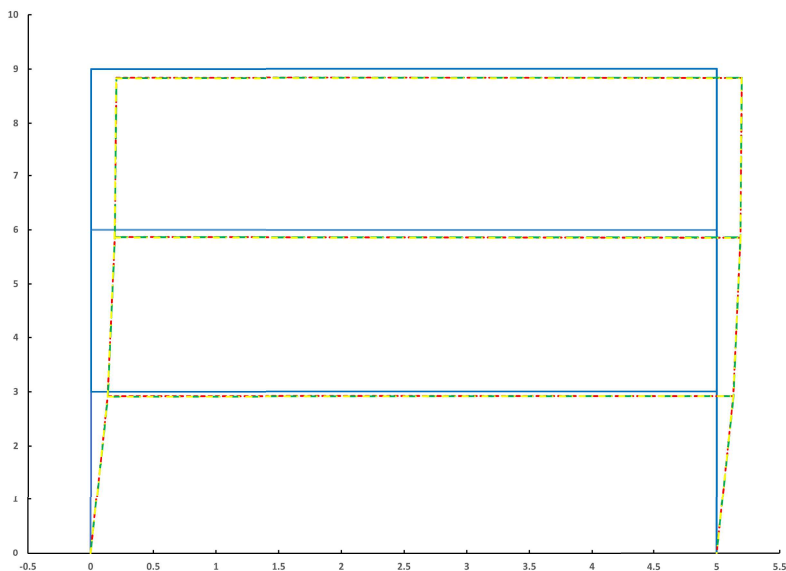


Figura 6.48: Desplazamientos de los nodos en el marco.



Capítulo 7

Diseño

Para el presente capítulo se realizaron comparaciones tanto en la revisión de si una sección en específico cumple o no con los requerimientos necesarios para poder soportar las cargas aplicadas sobre la viga modelada, así como si el software ANDIS selecciona una sección transversal igual a la de los ejemplos o una más grande.

7.1. Diseño a tensión 1

Este análisis se realizó comparando el ejemplo 4.1 de diseño de miembros a tensión del Libro “Diseño de Estructuras de Acero” de la editorial Alfaomega. (McCormac y Csernak, 2013). Este ejemplo consistió en lo siguiente: Seleccionar un perfil W12 de acero A992, con una longitud de 30 pies, que soporte cargas a tensión $P_D = 130lb$ y $P_L = 110klb$, y este se encontrara unido en sus extremos por dos líneas de tornillos de 7/8” en cada uno de los patines, mínimo debe tenerse en cuenta 3 tornillos por hilera a una separación de 4” entre cada tornillo (McCormac y Csernak, 2013).

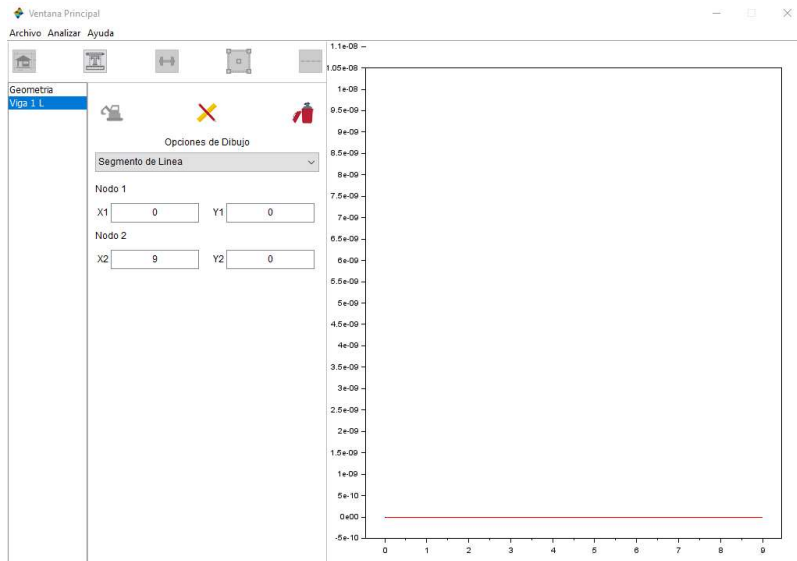


Figura 7.1: Definición de geometría EJ1 de diseño.

Seguido de crear la geometría, asignar las cargas y asignar la sección transversal de W12x35. Introducimos los parámetros necesarios para que ANDIS, realice la comprobación de si este perfil soporta las cargas aplicadas a él.

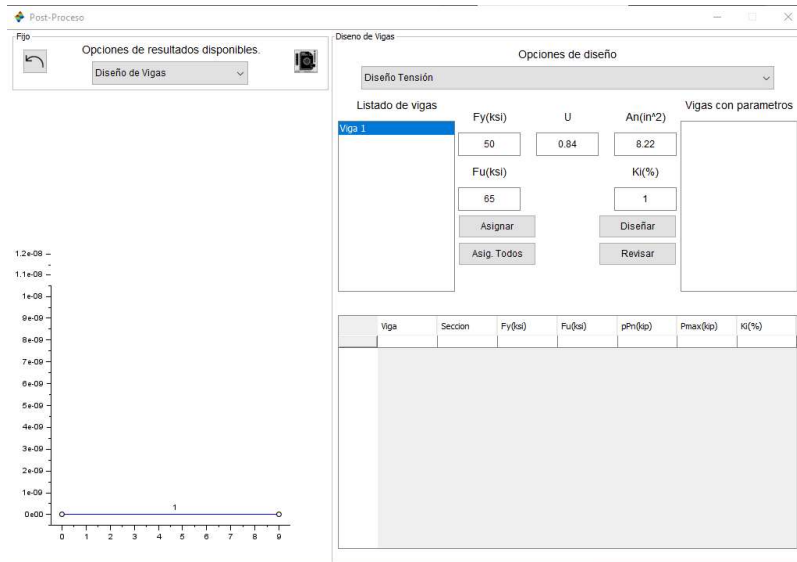


Figura 7.2: Parametros EJ1 de diseño.

Al ejecutar la revisión, ANDIS arroja el siguiente resultado:

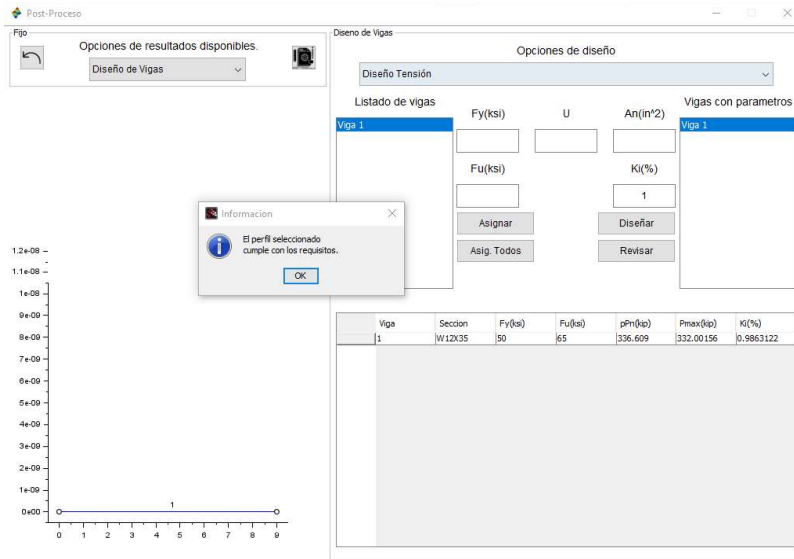


Figura 7.3: Resultado EJ1 de diseño.

Como resultado en el libro de donde se tomó este ejemplo, se asegura que cualquier perfil igual o superior al seleccionado cumple con las cargas aplicadas, lo cual es coherente con el resultado arrojado por ANDIS.



Capítulo 8

Conclusiones.

Se realizó una investigación de los antecedentes de los métodos clásicos para el análisis estructural, la metodología de elementos finitos y del lenguaje de programación empleado para el desarrollo del software ANDIS, con el fin de tener mayor entendimiento sobre el tema. Se desarrolló un software aplicando la metodología de elementos finitos adaptado al modelo de vigas, el cual permite conocer los valores de fuerzas internas de los elementos analizados, así como las deformaciones generadas por fuerzas externas aplicadas. Se desarrolló un software que permite realizar el diseño de elementos tipo viga a tensión, flexión y compresión para su posterior análisis de resultados. Con el fin de verificar los resultados obtenidos por el software ANDIS se realizó una comparación con el software COMSOL. Utilizando como base un ejemplo con solución analítica, se modeló la geometría, se asignaron las características y se realizó una comparación de los resultados obtenidos, de lo cual se concluyó que el software ANDIS entregaba resultados mas exactos con menor número de grados de libertad que el software COMSOL. Después de la validación realizada con ejemplos con solución analítica, se realizó una comparación de resultados de ejercicios complejos. Se contrastaron 3 softwares diferentes ANDIS, COMSOL y ROBOT, y como resultado se obtuvo que el software ANDIS brinda mayor precisión de resultados en casos donde la sección transversal del elemento varía a lo largo del mismo, como se muestra en la comprobación 6 de ejemplos numéricos. Para entregar los resultados del análisis de los elementos, se presentan al usuario valores de desplazamientos, deformaciones y fuerzas internas, así como un gráfico que muestra el comportamiento del elemento modelado.



Referencias

- Acosta, L. M., y Antonio, U. (2011). Ejemplos de Aplicación de la Optimización Estructural mediante Elementos Finitos. *Revista Inge@UAN*, 2(3), 52–55. Descargado de csifesvr.uan.edu.co/index.php/ingean/article/download/20/14
- Agüero, A. C., y Actis, F. (1997, noviembre). El método de elementos finitos aplicado a la ingeniería eléctrica. *Mecánica computacional*, XVII, 717–724.
- AISC. (2011). *Structural Steel Construction Manual* (n.º February).
- AISC. (2016). *Specification for Structural Steel Buildings*.
- ASCE. (1930). Proceedings of the American Society of Civil Engineers. *Science*, 1(3), 84. doi: 10.1126/science.1.3.84
- Bathe, K.-J. (2008, jun). *Finite element method*. John Wiley & Sons, Inc. doi: 10.1002/9780470050118.ecse159
- Bauchau, O. A., y Craig, J. I. (2009). Euler-bernoulli beam theory. En *Structural analysis* (pp. 173–221). Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-90-481-2516-6_5
- Baudin, M., Couvert, V., y Steer, S. (2010). Optimization in scilab. *Scilab Consortium, INRIA Paris-Rocquencourt*.
- Baudin, M., y cols. (2010). Introduction to scilab. *Consortium Scilab. January*, 34–56.
- Bunks, C., Chancelier, J.-P., Delebecque, F., Goursat, M., Nikoukhah, R., y Steer, S. (2012). *Engineering and scientific computing with scilab*. Springer Science & Business Media.

- Campbell, S. L., Chancelier, J.-P., y Nikoukhah, R. (2009, nov). Modeling and simulation in scilab. En *Modeling and simulation in scilab/scicos with ScicosLab 4.4* (pp. 73–106). Springer New York. doi: 10.1007/978-1-4419-5527-2_3
- Carpio, M. P., Proaño, M., Coello García, H., y Maita, G. (2011). Método de elementos finitos aplicado a la solución de armaduras hiperestáticas. *UNIVERSIDAD VERDAD / N^o 54*, 221–228.
- Celigüeta Lizarza, J. (2008). *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural*. Descargado de <https://doi.org/84-921970-2-1>
- Courant, R. (1943). Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49(1), 1–23. doi: 10.1090/s0002-9904-1943-07818-4
- Davis, T. A. (2007). *Direct methods for sparse linear systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Dhatt, G. (2012). *Finite element method*. Wiley.
- Domínguez, Á. F. (2015). *Resolvidor De Sistemas De Ecuaciones Diferenciales Unidimensionales Por El Método Del Elemento Finito*. (Tesis Doctoral no publicada). UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIHUAHUA.
- Frei, W. (2013, october). *Meshing considerations for linear static problems — comsol blog*. <https://www.comsol.com/blogs/meshing-considerations-linear-static-problems/>. ((Accesado el 29/03/2023))
- Gonzalez, O. (2002). *Análisis Estructural*. LIMUSA.
- Hibbeler, R. C. (2014). *Analisis Estructural* (Tercera Ed ed.). PEARSON.
- Jagota, V., Sethi, A. P. S., y Kumar, K. (2013). Finite element method: an overview. *Walailak Journal of Science and Technology (WJST)*, 10(1), 1–8.

- Manrique Vega, A. (2009). Scilab Software. *Revista VirtualPRO*.
Descargado de <https://www.virtualpro.co/biblioteca/-software-scilab-#{#}comocitar> (Consultado en línea en la Biblioteca Digital de Bogotá (<https://www.bibliotecadigitaldebogota.gov.co/resources/2207709/>)).
- McCormac, J. C., y Csernak, S. F. (2013). Diseño de Estructuras de Acero. *Alfaomega*, 5, 736. Descargado de <https://www.academia.edu/28111116/Dise~{n}o{-}de{-}Estructuras{-}De{-}Acero{-}McCormac{-}5ta{-}Ed{-}pdf>
- McCormac, J. C., y Nelson, J. K. (2002). *Structural steel design lrfd method*. Prentice Hall.
- Medina, R., Salas, M., Luco, R., y Bertram, V. (2005, may). ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS NAVALES MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS. *Síntesis Tecnológica*, 2(1), 27–36. doi: 10.4206/sint.tecnol.2005.v2n1-04
- Pelosi, G. (2007, apr). The finite-element method, part i: R. l. courant [historical corner]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 49(2), 180–182. doi: 10.1109/map.2007.376627
- Readle, D. (2019). *Euler-bernoulli beam bending*. *readle.co.uk engineering tools and guidance online*. <https://readle.co.uk/articles/euler-bernoulli-beam-bending.php>. ((accesado el 26/03/2023))
- Segui, W. T. (2000). *Diseno de estructuras de acero con lrfd - 2b* edicion*. International Thomson Editores.
- Sinira, B. G., Özhanb, B. B., y Reddy, J. N. (2014). Buckling configurations and dynamic response of buckled euler-bernoulli beams with non-classical supports. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 11(14), 2516–2536. doi: 10.1590/s1679-78252014001400010
- Tarancon, J. (2008). *Método de elementos finitos aplicado a vibraciones*. Descargado de <http://hdl.handle.net/10251/710>

Usón Sardaña, A. (2007). *Aplicación del método de elementos finitos al perfeccionamiento de pinzas amperimétricas* (Tesis Doctoral). Descargado de <http://zaguan.unizar.es/record/1912/export/hx>

Wouwer, A. V., Saucez, P., y Vilas, C. (2014). *Simulation of ode/pde models with matlab®[®], octave and scilab: Scientific and engineering applications*. Springer.