

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIHUAHUA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

---



**ANÁLISIS EFECTIVO DEL MODELO COSMOLÓGICO CUÁNTICO  
DE BIANCHI IX**

**POR:**

**GUSTAVO ALEJANDRO SÁNCHEZ HERRERA**

**TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
BÁSICAS**

**CHIHUAHUA, CHIH., MÉXICO**

**JUNIO DE 2023**



Análisis efectivo del modelo cosmológico cuántico de Bianchi IX. Tesis presentada por Gustavo Alejandro Sánchez Herrera como requisito parcial para obtener el grado de Maestro en Ciencias Básicas, ha sido aprobado y aceptado por:

---

**M.I. Fabián Vinicio Hernández Martínez**  
Director de la Facultad de Ingeniería

---

**Dr. Fernando Martínez Reyes**  
Secretario de Investigación y Posgrado

---

**M.S.I. Karina Rocío Requena Yáñez**  
Coordinadora Académica

---

**Dr. Héctor Hugo Hernández Hernández**  
Director de Tesis

**Junio 2023**

---

Fecha

**COMITÉ**

**Dr. Héctor Hugo Hernández Hernández**

**Dr. Oscar Gerardo Loaiza Brito**

**Dr. Juan Daniel Reyes Pérez**

**Dr. José Luis Herrera Aguilar**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
**CHIHUAHUA**

22 de junio de 2023.

**ING. GUSTAVO ALEJANDRO SÁNCHEZ HERRERA**

**Presente. -**

En atención a su solicitud relativa al trabajo de tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias Básicas, nos es grato transcribirle el tema aprobado por esta Dirección, propuesto y dirigido por el director **Dr. Héctor Hugo Hernández Hernández** para que lo desarrolle como tesis, con el título **“ANÁLISIS EFECTIVO DEL MODELO COSMOLÓGICO CUÁNTICO DE BIANCHI IX”**.

### Índice de Contenido

Agradecimientos

Prefacio

Índice de contenido

Índice de figuras

Introducción

**1. Capítulo 1: Revisión general**

- 1.1 Mecánica clásica
- 1.2 Relatividad general
- 1.3 Cosmología
- 1.4 Discusión del capítulo 1

**2. Capítulo 2: Dinámica efectiva del método de aproximación de momentos**

- 2.1 Mecánica cuántica
- 2.2 El teorema de Ehrenfest
- 2.3 Método efectivo de aproximación por momentos
- 2.4 El método estándar cosmológico  $\Lambda$ CDM
- 2.5 El método  $\Lambda$ CDM efectivo de momentos
- 2.6 Discusión del capítulo 2



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
**CHIHUAHUA**

3. Capítulo 3: Estudio efectivo del modelo cosmológico cuántico de Bianchi IX
    - 3.1 Cosmología homogénea y el modelo de Bianchi IX
    - 3.2 El modelo Mixmaster clásico
    - 3.3 Análisis efectivo del modelo Mixmaster cuántico
    - 3.4 Discusión del capítulo 3
  4. Conclusión y discusión
- Apéndice A: Mecánica cuántica
- Apéndice B: Corchetes de Poisson entre los momentos  $G^{a'b}$  de segundo orden
- Referencias

**ATENTAMENTE**  
*"naturam subiecit aliis"*

**EL DIRECTOR**

**M.I. FABIÁN VINICIO HERNÁNDEZ  
MARTÍNEZ**

**FACULTAD DE  
INGENIERÍA  
U.A.CH.**



**DIRECCIÓN**

**SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN  
Y POSGRADO**

**DR. FERNANDO MARTÍNEZ REYES**

## Dedicatoria

*A mi madre, por apoyarme en todo momento y acompañarme durante mi trayecto profesional, por enseñarme que no importa que tan difícil sea la situación, siempre se puede salir adelante. A mi padre, por brindarme todos los consejos que me han llevado a querer superarme siempre y no quedarme conforme con lo que he logrado. A mi hermana, por estar siempre a mi lado cuando la necesito. A mis amigos, por creer siempre en mí y en mis capacidades.*

## Agradecimientos

*A mi director de tesis el Dr. Héctor Hugo Hernández Hernández, gracias por dedicarme un poco de su tiempo y sabiduría, por transmitirme esas ganas de siempre seguir aprendiendo cosas nuevas y darme la confianza para preguntar y resolver todas mis dudas. A mis revisores de tesis, gracias por su dedicación y profesionalismo, por asegurarse de que realmente comprendí el conocimiento que me transmitieron y por todas sus valiosas observaciones que me permitieron mejorar este trabajo de investigación. Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por apoyarme económicamente al otorgarme la beca que me permitió dedicarme completamente a la investigación. Agradezco a la Universidad Autónoma de Chihuahua (UACH) y al personal administrativo por brindarme un lugar para estudiar y proporcionarme los documentos que necesité durante mi estancia en la universidad.*

# Prefacio

Estudiar sistemas cuánticos no es, por lo general, una tarea sencilla de realizar cuando estos son más apegados a la realidad, esto debido a su complejidad matemática. Una forma de estudiar estos sistemas es a través métodos efectivos que permiten obtener soluciones aproximadas, por ejemplo, la aproximación WKB. Los métodos de aproximación son tan versátiles que han permitido estudiar una infinidad de sistemas que involucran procesos complejos, por ejemplo, procesos en cromodinámica cuántica [1], la obtención de información sobre la energía cinética molecular [2], el estudio de sistemas cuánticos relativistas [3], el espectro de masa de mesones [4], perturbaciones inflacionarias cosmológicas [5], ondas gravitacionales [6], etc.

En esta tesis se pretende estudiar el modelo cosmológico cuántico de Bianchi IX a través de una aproximación que permite la obtención de un Hamiltoniano efectivo, el cual se define como el Hamiltoniano del análogo clásico del sistema aumentado con dispersiones (o momentos) como variables dinámicas. Este método permite recobrar la noción de trayectorias de partículas clásicas que es imposible obtener de la mecánica cuántica usual. La evolución de los momentos esta determinada por una función de onda inicial. Generalmente, el sistema de ecuaciones que se obtiene son acopladas y altamente no lineales, por lo que, la mayoría de las veces el sistema se vuelve insoluble analíticamente y es necesario recurrir a métodos numéricos para obtener una solución parcial. Particularmente, este método de aproximación requiere truncamientos consistentes del Hamiltoniano para la obtención de las ecuaciones dinámicas. Sin embargo, a través de un cambio de los momentos a sistemas de pares canónicos se construye un potencial efectivo que evita los truncamientos.

Este método de aproximación ha permitido obtener información precisa que es comparable con los datos experimentales, por ejemplo, para un oscilador armónico truncado, la energía del estado basal obtenida con el potencial efectivo es de  $E = 1.47$ , mientras que su valor exacto es  $E = 1.44$  [7].

En el capítulo 1 se estudian de manera breve los conceptos y definiciones físicas de temas fundamentales de la mecánica clásica, relatividad, y cosmología. En el capítulo 2 se presenta una breve introducción de los conceptos físicos de la mecánica cuántica, y posteriormente el formalismo del método efectivo de momentos. Finalmente, en el capítulo 3 se analiza la dinámica efectiva de un modelo cosmológico homogéneo anisotrópico del universo.





# Índice de Contenido

Agradecimientos	i
Prefacio	ii
Índice de Contenido	iii
Índice de Figuras	iv
Introducción	v
1. Capítulo 1: Revisión General	
1.1 Mecánica Clásica	
1.1.1 Ecuaciones de Movimiento de Lagrange	1
1.1.2 Ecuaciones de Movimiento de Hamilton	4
1.2 Relatividad General	6
1.2.1 Matemáticas de la relatividad general	6
1.2.2 Ecuaciones de campo de Einstein	13
1.2.3 El tensor de materia y la ecuación de estado	16
1.3 Cosmología	18
1.3.1 Dinámica de un universo plano, homogéneo, e isotrópico	18
1.3.2 El modelo estándar cosmológico	20
1.4 Discusión del capítulo 1	22
2. Capítulo 2: Dinámica efectiva del método de aproximación de momentos	
2.1 Mecánica cuántica	23
2.2 El teorema de Ehrenfest	24
2.3 Método efectivo de aproximación por momentos	25
2.3.1 Análisis efectivo del oscilador armónico cuántico	28
2.3.2 Análisis efectivo del péndulo cuántico	30
2.4 El modelo estándar cosmológico $\Lambda$ CDM	35
2.5 El modelo $\Lambda$ CDM efectivo de momentos	39
2.6 Discusión del capítulo 2	42
3. Capítulo 3: Estudio efectivo del modelo cosmológico cuántico de Bianchi IX	
3.1 Cosmología homogénea y el modelo de Bianchi IX	43
3.2 El modelo Mixmaster clásico	45



3.2.1 Métrica anisotrópica de Kasner	45
3.2.2 Dinámica del Mixmaster	48
3.2.3 Solución numérica del Mixmaster	50
3.3 Análisis efectivo del modelo Mixmaster cuántico	56
3.3.1 Desarrollo efectivo de momentos de $H_{IX}$	56
3.3.2 Desarrollo efectivo de momentos de $H_V$	61
3.3.3 Potencial efectivo del Mixmaster cuántico	64
3.4 Discusión del capítulo 3	67
4. Conclusión y discusión	68
Apéndice A: Mecánica cuántica	vi
Apéndice B: Corchetes de Poisson entre los momentos $G^{a,b}$ de segundo orden	vii
Referencias	viii

# Índice de Figuras

1. Ejemplo de localidad en una 2-esfera	7
2. Composición de las funciones $\psi$ y $\phi$	8
3. Representación de una bola abierta y un sistema coordinado en $R^n$	8
4. Representación de los componentes de una variedad diferenciable $M$	9
5. Ejemplos de variedades diferenciales	9
6. Curvas y espacios tangentes en una variedad diferenciable $M$	10
7. Transporte paralelo de un vector $v_p$ en una variedad $M$	11
8. Representación geométrica del bracket de Lie	12
9. Evolución del factor de escala $a(t)$ para diferentes contenidos de materia	20
10. Evolución del oscilador armónico efectivo	30
11. Evolución de momentos del oscilador armónico efectivo	30
12. Evolución del péndulo clásico	31
13. Evolución del péndulo cuántico en el limite semiclásico	32
14. Evolución efectiva de momentos del péndulo cuántico	32
15. Espacio de fase del péndulo efectivo de momentos	33
16. Evolución del potencial efectivo del péndulo cuántico	34
17. Espacio de fase del péndulo del potencial efectivo	34
18. Evolución del factor de escala para diferentes valores de $\Lambda$	38
19. Evolución de $\phi(t)$ para diferentes contenidos de materia	39
20. Incertidumbre de la función $a(t)$ para diferentes valores de $\sigma$	40
21. Remoción de la singularidad inicial	41
22. Inhomogeneidad e isotropía Vs. Homogeneidad y anisotropía	43
23. Lineas equipotenciales del modelo IX de Biachi	53
24. Potencial $V(\beta_+, \beta_-)$ del modelo de IX de Bianchi	54
25. Evolución clásica de una partícula dentro del potencial $IX$	54

26. Evolución clásica de una partícula en el espacio $\beta_+, \beta_-,$ y $\alpha$	55
27. Trayectoria clásica en diferentes regiones del potencial de Bianchi $IX$	56
28. Trayectoria clásica en la región $\beta_+ \rightarrow +\infty,$ y $ \beta_- \ll 1 $ del potencial $V(\beta_+, \beta_-)$	56
29. Evolución clásica y efectiva de momentos en el espacio $\beta_+,$ y $\beta_-$	59
30. Incertidumbre de la trayectoria efectiva de momentos	60
31. Evolución de $a(t)$ en función de la parametrización $\alpha(t)$	60
32. Evolución efectiva de momentos de $a(t)$ en el espacio $\beta_+, \beta_-,$ y $\alpha$	61
33. Comparación de las trayectorias clásicas y efectivas de $H_V,$ y $H_{QV}$	64
34. Líneas equipotenciales del Hamiltoniano $H'_V$	65
35. Comparación de las trayectorias de $H_{ADM}$ y de su serie de Taylor en $\beta_+$ y $\beta_-$	66
36. Trayectorias clásicas de $H'_V$ para diferentes condiciones iniciales	66
37. Trayectorias clásicas y del potencial efectivo de $H'_V$	67

# Introducción

La cosmología estudia la evolución del universo como un todo, ha permitido desarrollar teorías sobre el destino y el origen del universo con el fin de obtener una mayor comprensión de lo que nos rodea. Mediante el uso de diferentes técnicas se ha logrado comparar los resultados obtenidos a partir de modelos cosmológicos con la información observacional actual. A mitad del siglo XX, el físico y astrónomo Ucraniano George Gamow propuso que inicialmente el contenido de materia del universo se encontraba en un estado de alta densidad y temperatura (posteriormente a ese escenario se le conocería como la teoría del Big Bang). La teoría de Gamow predecía una energía proveniente de las fluctuaciones del fluido de materia la cual debería tener una temperatura actual de unos cuantos grados Kelvin. Tiempo después, los físicos estadounidenses A. A. Penzias y R. W. Wilson descubrieron una radiación que provenía del espacio en forma de ruido y que concordaba con la radiación que predecía la teoría de Gamow [8]. A esta radiación se le dió el nombre de radiación cósmica de fondo o CMB (Cosmic Microwave Background) por sus siglas en inglés. De acuerdo con la teoría de Gamow, además de la radiación cósmica de fondo, el universo debe ser tratado como un fluido cósmico en expansión, por lo que, si se retrocede en el tiempo es posible estudiar todos los mecanismos que dieron origen a la la formación de la estructura de la materia.

Se sabe que actualmente el universo se encuentra en una etapa de expansión acelerada, y que esta aceleración es atribuida a la energía oscura. Usualmente, para describirla se utiliza la constante cosmológica  $\Lambda$  introducida por Einstein en 1917. La energía oscura ocupa al rededor del 73 por ciento del contenido total en el universo [9], y un 23 por ciento es atribuido a un tipo de materia exótica no relativista la cual tuvo sus orígenes en el universo temprano conocida como materia oscura o CDM por sus siglas en inglés (Cold Dark Matter) [10].

El modelo estándar  $\Lambda$ CDM (Lambda cold dark matter), es uno de los mejores modelos para describir la estructura y la dinámica del universo a gran escala debido a la gran coincidencia que posee con los datos observacionales [11] y es aproximado por la métrica FLRW propuesta por Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [12]. La métrica FLRW define un elemento de línea que describe un universo homogéneo e isotrópico en donde la curvatura del espacio está determinada por una constante  $k$ , el espacio es dinámico por lo que puede encontrar en contracción o expansión y el tamaño del universo se determina a partir del factor de escala  $a(t)$ , debido a que el modelo estándar de cosmología está basado en la teoría de la relatividad general, la dinámica se obtiene solucionando las ecuaciones de campo de Einstein [8].

Uno de los problemas presentes en la cosmología clásica surge al tratar de estudiar las propiedades del espacio a pequeña escala. Cuando se retrocede la evolución cosmológica, las ecuaciones de la relatividad general dejan de ser aplicables y surgen singularidades iniciales en donde el radio del universo se hace cero. Estas singularidades se conocen como el Big Bang y Big Crunch [13].

Dentro del estudio de la cosmología se encuentran los modelos de Bianchi<sup>1</sup>, los cuales describen el comportamiento de universos homogéneos anisotrópicos [14]. Parti-

---

<sup>1</sup>Los modelos de Bianchi se estudiarán más detalladamente en el capítulo 3

cularmente, el Bianchi IX (similar al modelo  $\Lambda$ CDM con curvatura positiva) se puede generalizar al modelo Mixmaster el cual describe la evolución de las anisotropías del universo cerca de la singularidad inicial [15]. La diferencia fundamental entre el modelo  $\Lambda$ CDM y el Mixmaster es que el primero considera un espacio homogéneo e isotrópico, mientras que el segundo considera anisotropías.

Debido a la existencia de una singularidad inicial, se ha optado por describir el universo de manera cuántica mediante el uso de una función de onda en lugar del espacio tiempo clásico [16]. Si las leyes de la mecánica cuántica son aplicables a todos los fenómenos de la naturaleza, la cosmología clásica debe poder extenderse a una descripción cuántica que permita hacer predicciones sobre la evolución del cosmos a partir del estado cuántico inicial. Este estado inicial puede ser útil para describir las características de homogeneidad e isotropía a gran escala [17]. Estudiar el comportamiento cuántico de ciertos modelos cosmológicos presenta generalmente un alto nivel de complejidad por lo que algunas veces es necesario utilizar aproximaciones efectivas para obtener una solución parcial del sistema.

Particularmente, una manera de obtener una aproximación de sistemas cuánticos complejos es a través de un método que permite el desarrollo un Hamiltoniano efectivo, el cual se define como el Hamiltoniano del análogo clásico de un sistema aumentado con dispersiones cuánticas como variables dinámicas [18]. Este método ha permitido estudiar sistemas interesantes que van desde modelos relativamente sencillos, por ejemplo, el tunelaje cuántico [19], hasta modelos de cosmología cuántica [20].

# Capítulo 1

## Revisión General

### 1.1. Mecánica clásica

#### 1.1.1. Ecuaciones de movimiento de Lagrange

El principio de Hamilton describe la dinámica de sistemas mecánicos para los cuales todas las fuerzas se pueden obtener a partir de un potencial escalar generalizado que puede ser una función de las coordenadas, y que posee una dependencia implícita del tiempo. Para un rango de tiempo de  $t_1$  a  $t_2$ , la dinámica de un sistema es determinada por la siguiente acción

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) dt, \quad (1.1.1)$$

donde  $\mathcal{L} \equiv T - V$  es el Lagrangiano y es la diferencia entre la energía cinética  $T$ , y la energía potencial  $V$ . Las coordenadas generalizadas  $q_n$  representan puntos del espacio de fase<sup>1</sup>. La evolución de un sistema físico es descrita por trayectorias en el espacio de fase en donde cada punto representa un estado diferente del sistema. De todas las posibles trayectorias que permiten la evolución de un sistema desde un estado en  $t_1$  a un estado en  $t_2$ , la que minimiza la acción es aquella en donde el valor de la integral (1.1.1) se mantiene constante, por lo que, su variación debe ser cero [22]

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) dt = 0, \quad (1.1.2)$$

Para un sistema de una dimensión, en donde el Lagrangiano depende solamente  $q$  y  $\dot{q}$ , la ec.(1.1.2) es

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt. \quad (1.1.3)$$

---

<sup>1</sup>El espacio de fase es el espacio de todas las posibles posiciones instantáneas de un sistema físico [21].

Variando la acción anterior con respecto a la coordenada  $q$  y  $\dot{q}$  se tiene que

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0, \quad (1.1.4)$$

y dado que la variación  $\delta q = q + q'$ , entonces

$$\delta \dot{q} = \dot{q} + \dot{q}' = \frac{d}{dt} q + \frac{d}{dt} q' = \frac{d}{dt} (q + q') = \frac{d}{dt} \delta q.$$

Reescribiendo  $\delta \dot{q}$  como  $d/dt(\delta q)$  e integrando el segundo término dentro de (1.1.4) por partes se tiene que

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt = 0,$$

la variación  $\delta q$  es una función que es pequeña en todos lados sobre el intervalo de tiempo de  $t_1$  a  $t_2$ . Los puntos extremos de la trayectoria en  $q(t_1)$  y  $q(t_2)$  establecen las condiciones iniciales del sistema, por lo que su variación  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ , por lo tanto, la integral anterior debe ser cero para todos los valores de  $\delta q$ , y

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \quad (1.1.5)$$

Para  $n$  grados de libertad, la ecuación anterior es

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.1.6)$$

Las ecuaciones (1.1.5), y (1.1.6) se conocen como las ecuaciones de movimiento de Lagrange y nos permiten obtener una relación entre las coordenadas, las velocidades y las aceleraciones de un sistema. Matemáticamente, la ecuación ec.(1.1.6) constituye un conjunto de ecuaciones de segundo orden para sistemas holonómicos<sup>2</sup> de  $n$  funciones  $q_i$  [23]. Para sistemas no-holonómicos<sup>3</sup> se considera que las variaciones  $q_i$  no son independientes unas de la otras, por lo que no es posible escribir las ecuaciones de restricción como  $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$ . Las ecuaciones de movimiento para estos sistemas se obtienen a través de los multiplicadores de Lagrange

$$\sum_{\alpha=1}^m \lambda_{\alpha} f_{\alpha} = 0, \quad (1.1.7)$$

<sup>2</sup>El término holonómico se emplea para las constricciones de un sistema que se pueden escribir de la forma  $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$  [21].

<sup>3</sup>Las constricciones no-holonómicas son de la forma  $\sum_{k=1}^n \omega_k(q_1, q_2, \dots, q_n) \cdot dq_k = 0$  y no son integrables [21]. Los términos holonómicos y no-holonómicos fueron nombrados así por el físico alemán Heinrich Herz con el fin de distinguir entre constricciones de velocidad en espacios de configuración de sistemas mecánicos [24].



donde  $\lambda_\alpha$  son funciones de las coordenadas y del tiempo. Asumiendo que la variación

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0, \quad (1.1.8)$$

se mantiene para sistemas semi-holonómicos <sup>4</sup>, la variación se escribe como una combinación de la ec.(1.1.7) y la ec.(1.1.8)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \mathcal{L} + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha f_\alpha \right) dt = 0, \quad (1.1.9)$$

desarrollando la variación anterior

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1.1.10)$$

donde

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^m \left\{ \lambda_\alpha \left[ \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] - \frac{d\lambda_\alpha}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \right\}.$$

La ecuación (1.1.10) es útil cuando se estudian problemas que involucran fuerzas generalizadas  $Q_i$ , por ejemplo, un sistema compuesto por un disco que se desliza sobre una pendiente sin resbalar [22].

Por definición, el momento canónicamente conjugado a la variable  $q_j$  es

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j},$$

la definición de  $p_j$  no es necesariamente igual al momento clásico, por ejemplo, para el caso de un grupo de partículas en un campo electro-magnético, el momento  $p_j$  es el momento mecánico más un término extra

$$p_{jx} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + q_i A_x.$$

Las coordenadas  $q_i$  que no aparecen en el Lagrangiano  $\mathcal{L}$  se conocen como coordenadas cíclicas, por lo que, de la ec.(1.1.6) se tiene que el momento canónicamente conjugado  $p_i$  a la coordenada  $q_i$  es constante. El momento conjugado generalizado a una coordenada cíclica se conserva [22].

---

<sup>4</sup>Las constricciones semi-holonómicas, a diferencia de las no-holonómicas son integrables, por ejemplo para un disco que rueda sin deslizarse, la restricción  $\dot{\phi} = \dot{x}$  implica que  $\phi = x + c$

### 1.1.2. Ecuaciones de movimiento de Hamilton

La diferencial total de un Lagrangiano que no depende explícitamente del tiempo  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$  es

$$d\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i,$$

donde la derivada parcial  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$  del segundo término es el momento generalizado canónico a la coordenada  $q_i$ , y  $\partial \mathcal{L} / \partial q_i$  del primer término es la derivada del momento. La ecuación anterior es entonces

$$d\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i,$$

reescribiendo el segundo término como  $\sum p_i d\dot{q}_i = d(\sum p_i \dot{q}_i) - \sum \dot{q}_i dp_i$  se tiene que

$$d\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i \dot{p}_i dq_i + d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) - \sum_i \dot{q}_i dp_i,$$

factorizando la derivada total y reescribiendo la ecuación anterior se llega a

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}\right) = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i, \quad (1.1.11)$$

donde el argumento del diferencial del lado izquierdo es la energía  $E$  del sistema en cuestión

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}, \quad (1.1.12)$$

por lo tanto, se define el Hamiltoniano del sistema como<sup>5</sup>

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}. \quad (1.1.13)$$

Desarrollando la derivada total de (1.1.13)

$$dH(p, q, t) = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i,$$

y comparando con la ec.(1.1.11) se obtienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

---

<sup>5</sup>Esta transformación que genera una expresión Hamiltoniana a partir del Lagrangiano se conoce como transformación de Legendre [22].

Este sistema de ecuaciones forman un conjunto de  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden que remplazan las ecuaciones de segundo orden de (1.1.6) obtenidas a partir del Lagrangiano, y son conocidas como las ecuaciones de Hamilton de movimiento [23].

Para una función  $u$  que depende de variables canónicas  $q$  y  $p$  se tiene que

$$\frac{d}{dt}u(q_i, p_i) = \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right),$$

sustituyendo  $dq_i/dt = \partial H/\partial p_i$ , y  $dp_i/dt = -\partial H/\partial q_i$  de la ecuación (1.1.14) se tiene que

$$\frac{d}{dt}u(q_i, p_i) = \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right),$$

esta estructura define una operación entre funciones que dependen de variables canónicas y se conoce como bracket de Poisson. El bracket de Poisson entre dos funciones  $u(q, p)$  y  $v(q, p)$  es

$$[u, v] = \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right). \quad (1.1.15)$$

En términos de los brackets de Poisson, las ecuaciones de movimiento para el par de variables de posición y momento son

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= [q_i, H], \\ \dot{p}_i &= [p_i, H]. \end{aligned}$$

Particularmente, la ecuación de movimiento para cualquier función  $u(q_i, p_i)$  es

$$\dot{u} = [u, H]. \quad (1.1.16)$$

La ecuación (1.1.15) permite definir los brackets fundamentales de Poisson para  $q_i$ , y  $p_i$

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}, \quad [p_i, p_j] = 0.$$

La ec. (1.1.16) permite obtener la dinámica de un sistema de manera más eficiente, además, esta formulación no tiene aplicaciones solamente en mecánica clásica, también puede ser utilizada para calcular las ecuaciones de movimiento de sistemas en mecánica cuántica [25]. Algunas veces es más complicado aplicar las ecuaciones de Hamilton en lugar de las ecuaciones de Lagrange, a pesar de esto, el formalismo Hamiltoniano nos permite tener una mejor comprensión de la física del sistema [22].

## 1.2. Relatividad general

Uno de los problemas que presenta la teoría de gravitación Newtoniana es que falla al tratar de predecir la precesión de la órbita del perihelio de Mercurio<sup>6</sup>. Para justificar este movimiento anómalo, el matemático Francés Urbain LeVerrier propuso la existencia de un nuevo planeta llamado Vulcan en 1855. Sin embargo, esta teoría fue descartada debido a la falta de evidencia observacional [27].

Una vez terminada la teoría de la relatividad especial en el año de 1905<sup>7</sup>, Einstein comenzó a trabajar en una generalización que incluyera los efectos gravitacionales, esto lo llevó a publicar varios artículos en los cuales describía algunos efectos como la deflexión de la luz cuando pasa cerca de objetos muy masivos y el corrimiento al rojo [31, 32]. En 1913 con ayuda del matemático Marcel Grossmann logró publicar un intento de las ecuaciones de campo. Sin embargo, después de analizarlas detalladamente por 2 años aproximadamente, llegó a la conclusión de que eran incorrectas principalmente porque no lograban describir con exactitud la precesión de Mercurio [33]. Esto lo llevó a reformular su teoría hasta que finalmente el 15 de noviembre de 1915 utilizando el principio de equivalencia el cual establece que localmente la aceleración uniforme y los campos gravitacionales son equivalentes [30], Einstein publicó en la academia de Berlín un documento el cual contenía las ecuaciones de campo que conocemos actualmente

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}.$$

La ecuación anterior representa un conjunto de 16 ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, de las cuales solo 10 soluciones son independientes (la obtención de las ecuaciones de campo se revisarán detalladamente más adelante). Estas muestran una relación entre la curvatura del espacio tiempo y su contenido de materia.

Justo después de haber publicado su teoría de la relatividad general, el 15 de febrero de 1917 Einstein obtuvo el primer modelo relativista del cosmos al aplicar sus ecuaciones de campo al universo [34], esto desencadenó una serie de importantes investigaciones sobre la evolución del cosmos marcando así el comienzo de la cosmología moderna.

### 1.2.1. Matemáticas de la relatividad general

Con el fin de dar una descripción matemática del espacio tiempo de 4 dimensiones es necesario el uso de estructuras conocidas como variedades diferenciables. Una variedad diferenciable es una estructura matemática que localmente se ve como  $R^n$  pero globalmente puede ser más compleja. Por ejemplo, la 2-esfera definida por la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , localmente se ve como un plano en  $R^2$  pero globalmente posee curvatura (figura 1.1) [35].

Una descripción más profunda de una variedad diferenciable requiere la noción de los siguientes conceptos matemáticos [35, 36, 37]:

---

<sup>6</sup>Aproximadamente 43 segundos de arco cada siglo [26].

<sup>7</sup>La teoría de la relatividad especial y sus principales características se puede consultar más a detalle en las referencias [28, 29, 30].

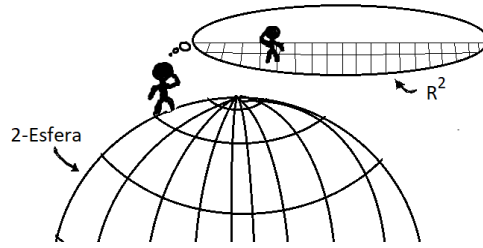


Figura 1.1: Localmente la 2-esfera se percibe como un espacio en  $R^2$ .

1. Dados dos conjuntos  $M$  y  $N$ , se define un mapeo  $\phi : M \rightarrow N$  como una generalización de una función que asigna a cada elemento de  $M$  un elemento en  $N$ .
2. Un mapeo  $\phi$  es suave si es infinitamente diferenciable, es decir de la clase de funciones tipo  $C^\infty$ .
3. Un mapeo  $\phi : M \rightarrow N$  se denomina un difeomorfismo si existe un mapeo inverso  $\phi^{-1} : N \rightarrow M$ , tal que  $\phi$  y  $\phi^{-1}$  son tipo  $C^\infty$ .
4. La operación de composición  $\circ$  entre dos mapeos  $\psi$  y  $\phi$  es  $(\psi \circ \phi)(a) : A \rightarrow C$ , en donde  $(\psi \circ \phi)(a) = \psi(\phi(a))$ ,  $a \in A$ ,  $\phi(a) \in B$ , y  $\psi(\phi(a)) \in C$  (figura(1.2)).
5. Se define una bola abierta en  $R^n$  como el conjunto de todos los puntos  $x \in R^n$  tales que  $|x - y| = [\sum_i (x^i - y^i)^2]^{1/2} < r$ , en donde  $y \in R^n$  es un valor fijo, y un  $r \in R$ . Las bolas abiertas son  $n$ -esferas centradas en  $y$  (figura (1.3a)). La unión de infinitas bolas abiertas se denomina un conjunto abierto  $U$ .
6. Una carta o sistema coordenado es un subconjunto de  $U$  de un conjunto  $M$ , junto con un mapeo  $\phi : U \rightarrow R^n$  de tal manera que la imagen  $\phi(U)$  es un abierto en  $R^n$  (figura (1.3b)).
7. Un atlas es una colección de cartas que satisface las siguientes condiciones
  - 7.1 La unión de todos los subconjuntos  $U_\alpha$  cubren la variedad  $M$
  - 7.2 Si dos sistemas coordenados se superponen su intersección es  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , y el mapeo  $(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})$  toma elementos de  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  y le asigna un elemento en  $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  (figura(1.4)).

Más específicamente, una variedad diferenciable  $M$  es un espacio que consiste en parches que localmente se ven como  $R^n$  que están unidos de forma que puedan cubrir la variedad completa y que contiene generalizaciones de funciones  $\phi_\alpha$  cuyo dominio son conjuntos abiertos  $U_\alpha$  en  $M$ , y su imagen esta en  $R^n$ , y que además, la función de transición  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : R^n \rightarrow R^n$  infinitamente diferenciable (figura 1.4).

Algunos ejemplos de variedades diferenciables son  $R^n$ , la  $n$ - Esfera  $S^n$  y el  $n$ -Toro  $T^n$  (figura 1.5). Sin embargo, no solo los objetos geométricos forman una variedad,

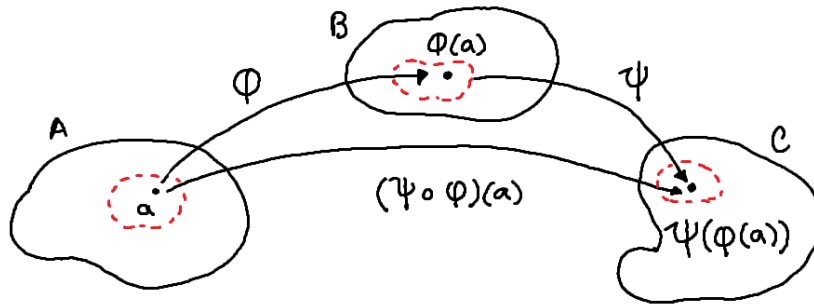
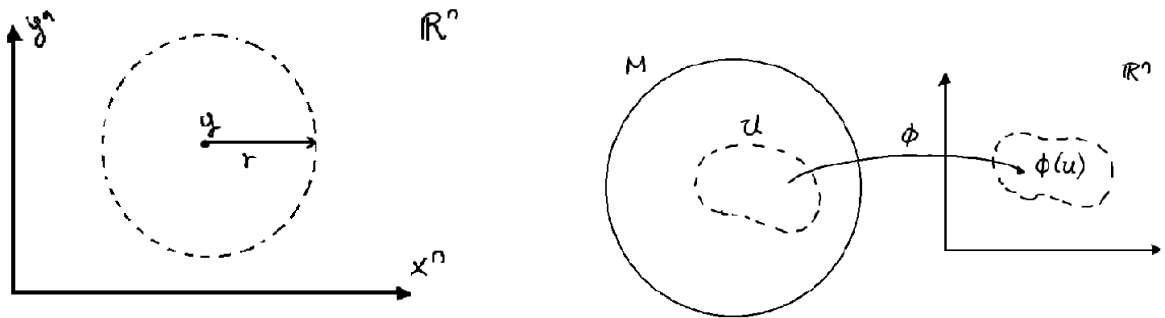


Figura 1.2: Composición de  $\psi$  con  $\phi$ . En el diagrama se observa que la composición  $(\psi \circ \phi)(a)$  tiene como dominio el conjunto  $A$ , y su imagen está en  $C$ .



(a) Representación de una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$  con centro en  $y$ .

(b) Carta o sistema coordenado. El sistema coordenado está representado por el conjunto  $\{U, \phi\}$ .

Figura 1.3: Representación de una bola abierta y un sistema coordenado en  $\mathbb{R}^n$ .

estructuras más abstractas como el conjunto de rotaciones en  $\mathbb{R}^n$  y el producto de dos variedades también forman una variedad [37].

Dada una variedad  $M$ , se define una curva  $\gamma$  como una función  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ . A cada punto  $p \in M$  se le puede asignar vector tangente  $v_p$  como un operador de derivada que proporciona la dirección en la que se está moviendo la curva (figura (1.6a)). Los vectores tangentes están definidos como mapeos  $v_p : M \rightarrow \mathbb{R}$  de manera que

$$v_p(f) = v(f)(p),$$

son lineales sobre funciones, y satisfacen la regla del producto de Leibniz

$$\begin{aligned} v_p(af + bg) &= av_p(f) + bv_p(g), \\ v_{fg} &= v_p(f)g + fv_p(g). \end{aligned}$$

La colección de todos los vectores tangentes  $v_p$  de un punto  $p \in M$  se conocen como el espacio tangente  $T_pM$  (figura (1.6b)). El espacio tangente es un espacio vectorial bajo la suma porque satisface las propiedad de linealidad y multiplicación por un escalar [35]

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2)f &= v_1(f) + v_2(f), \\ (av)(f) &= av(f), \end{aligned}$$

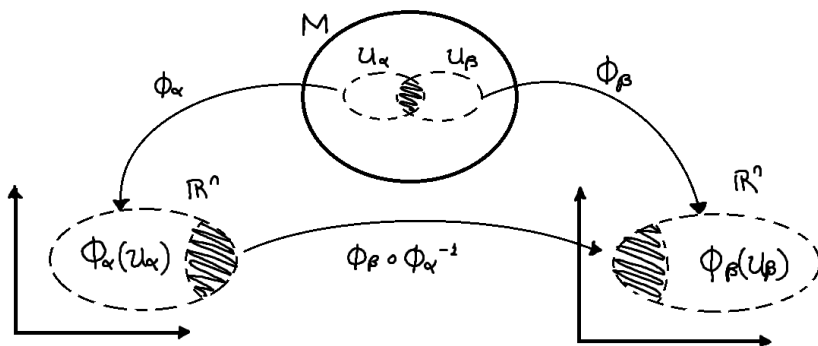


Figura 1.4: En la imagen se muestra una variedad diferenciable  $M$ , las cartas  $\phi_\alpha$ ,  $\phi_\beta^{-1}$ , y la función de transición  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta$ . Los puntos  $p_1$  y  $p_2$  están contenidos por los conjuntos abiertos  $u_\alpha$  y  $u_\beta$ .

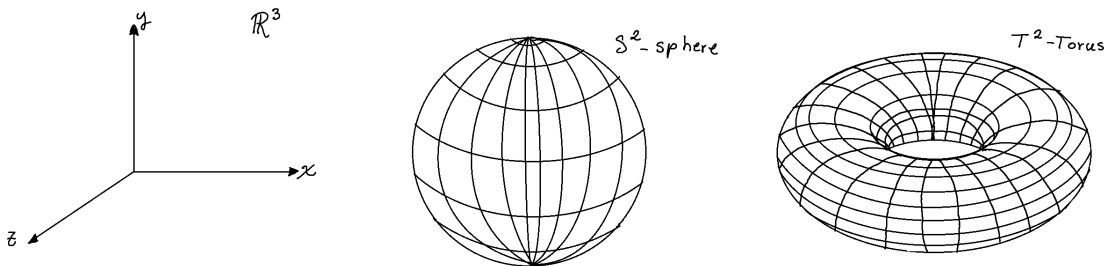


Figura 1.5: El espacio  $R^3$ , la  $S^2$ -esfera, y el  $T^2$ -toro son ejemplos de variedades diferenciables.

y es el espacio de las derivadas direccionales a través de las curvas que pasan por el punto  $p$  [37].

En una variedad diferenciable, toda la información sobre la curvatura del espacio y sus propiedades geométricas como lo es la distancia entre dos puntos se definen a través de una métrica  $g_{\mu\nu}$ . La métrica es un tensor simétrico de rango  $(0, 2)$  con la inversa  $g^{\mu\nu}$ , y con determinante  $g = |g_{\mu\nu}|$  diferente de cero. En relatividad general  $g_{\mu\nu}$  es una métrica pseudo-Rimanniana debido a que tiene la signatura  $(-, +, +, +)$ . Para un espacio tiempo plano de 4 dimensiones  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , y  $\eta_{\mu\nu}$  es de la forma

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y permite bajar o subir índices de tensores, por ejemplo,  $g_{\mu\beta} T^\beta{}_\nu = T_{\mu\nu}$ . Formalmente, la métrica es un mapeo multilinear de uno-formas a números reales, en otras palabras, al proporcionarle dos vectores  $V^\mu$  y  $W^\nu$  a  $g_{\mu\nu}$  se obtiene un número real, esto permite calcular el producto interno mediante la siguiente relación [37]

$$g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = g(V, W) = ds^2(V, W).$$





(a) Representación de una curva  $\gamma$  y un vector tangente  $v_p$  en una variedad  $M$ .  $p$  representa cualquier punto de la curva.

(b) Representación de  $T_p M$  en  $M$ . El espacio tangente  $T_p M$  es el conjunto de todos los vectores tangentes al punto  $p$  de la variedad.

Figura 1.6: Curvas y espacios tangentes en una variedad.

Utilizando  $g_{\mu\nu}$  se construye el elemento de línea  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  el cual describe la distancia infinitesimal entre dos eventos del espacio tiempo, la forma del elemento de línea depende del sistema de coordenadas en el que se esté trabajando, por ejemplo, para coordenadas Cartesianas se tiene que

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2,$$

mientras que para coordenadas esféricas, donde  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ , y  $z = r \cos \theta$ , el elemento de línea es

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Algunos ejemplos más complejos del elemento de línea son la métrica *FLRW* para un espacio tiempo homogéneo e isotrópico [38]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right],$$

la métrica del espacio tiempo de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

y la métrica de Kasner para un espacio tiempo anisotrópico [39]

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2P_1} dx^2 + t^{2P_2} dy^2 + t^{2P_3} dz^2.$$

En general, las operaciones entre vectores requiere que estos pertenezcan al mismo espacio tangente. Dados dos vectores  $v_{p_1} \in T_{p_1}$  y  $v_{p_2} \in T_{p_2}$  definidos en una variedad con curvatura, es necesario transportar el vector  $v_{p_1}$  a través de una curva en la variedad desde  $T_{p_1}$  hasta  $T_{p_2}$  antes de realizar algún tipo de comparación entre ellos. Sin embargo, en un espacio curvo el resultado de transportar un vector de un punto a otro depende

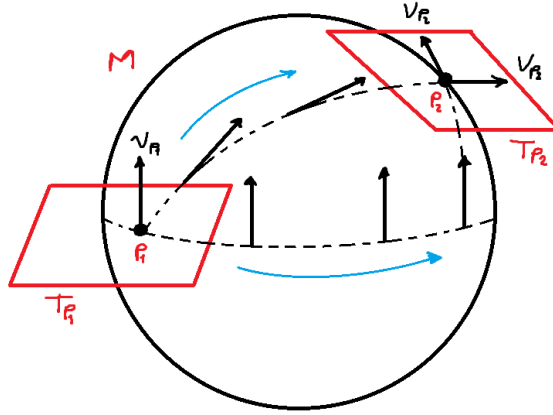


Figura 1.7: En la figura se muestra el cambio de un vector resultante  $v_p$  el cual ha sido transportado desde un espacio tangente en un punto  $p_1$  definido en la variedad hasta un punto  $p_2$  a través de trayectos diferentes.

de la trayectoria que se tome (figura (1.7)). La única forma de transportar un vector a través de una curva manteniendolo constante en todo momento es mediante una conexión definida a partir de la métrica conocida como la conexión de Levi-Civita [37], la cual es descrita a través de los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ , en donde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (1.2.1)$$

A la acción de transportar un vector de forma constante a través de una curva se le denomina transporte paralelo.

La tasa de cambio de un vector con respecto a el mismo suponiendo que ha sido transportado paralelamente se cuantifica a través de la derivada covariante  $\nabla$ , la cual es una generalización de la derivada parcial que actúa de forma lineal sobre campos tensoriales, y obedece la regla del producto de Leibniz [37]

$$\begin{aligned} \nabla(T + S) &= \nabla T + \nabla S, \\ \nabla(T \otimes S) &= (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S), \end{aligned}$$

en donde  $\nabla$  se define como el operador de derivada direccional más una transformación lineal, y  $\otimes$  es el producto tensorial. Dado un campo vectorial  $V$ , su derivada covariante es

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda. \quad (1.2.2)$$

La derivada covariante permite conocer si una variedad presenta curvatura. En un espacio plano, los coeficientes de Christoffel  $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu = 0$ , y  $\nabla$  se reduce a la derivada parcial.

En general, la derivada covariante de un tensor de rango  $(k, l)$  es

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} &= \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\ &+ \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \cdots \\ &- \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l} - \cdots \end{aligned}$$

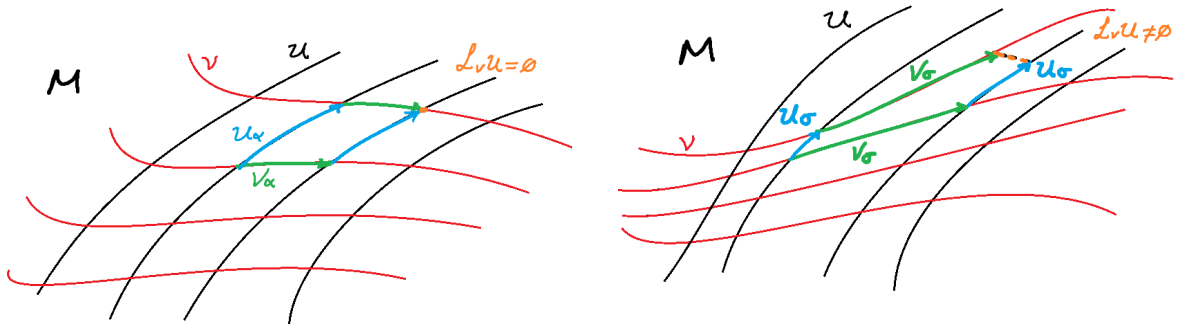
En términos de la derivada covariante, el transporte paralelo de un campo tensorial  $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}$  a través de una curva  $x^\mu(\lambda)$  es

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = 0.$$

Dados dos campos vectoriales  $U = u^\sigma \partial_\sigma$ , y  $V = v^\sigma \partial_\sigma$  en una variedad, se define el bracket de Lie como

$$\mathcal{L}_U V = [U, V] = (u^\sigma \partial_\sigma v^r - v^\sigma \partial_\sigma u^r) \partial_r. \quad (1.2.3)$$

El bracket de Lie permite medir la separación que existe entre curvas de flujo de los campos vectoriales cuando se sigue una trayectoria cerrada (figura(1.8))



(a) En figura se muestra qué cuando no existe separación entre dos curvas de flujo de los campos vectoriales (punto color naranja) el bracket de Lie es  $\mathcal{L}_U V = 0$ .

(b) En figura se muestra qué cuando existe una separación entre dos curvas de flujo de los campos vectoriales (línea punteada color naranja) el bracket de Lie es  $\mathcal{L}_U V \neq 0$ .

Figura 1.8: Representación geométrica del bracket de Lie.

En relatividad general, cada conexión se construye a partir de una métrica, y por lo tanto, es posible definir una gran cantidad de ellas en una variedad. Dadas dos conexiones  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ , y  $\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ , la diferencia de ella es un tensor definido por

$$S^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu},$$

donde  $S^\lambda_{\mu\nu}$  representa una corrección tensorial de una conexión fiducial  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ , de tal manera que

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} - S^\lambda_{\mu\nu}.$$

El tensor  $S^\lambda_{\mu\nu}$  de la ecuación anterior se denomina tensor de torsión. Para describir un espacio libre de torsión se suele utilizar la ec. (1.2.1) con  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  definida por

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}),$$

y con el bracket de Lie definido por la ec. (1.2.3).

Por otra parte, para la descripción de un espacio más general (incluyendo torsión), se utiliza la siguiente conexión

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \\ &+ \frac{1}{2}(-C_{\alpha\beta}^{\mu} + g_{\alpha\sigma}g^{\mu\tau}C_{\tau\beta}^{\sigma} + g_{\alpha\beta}g^{\mu\tau}C_{\tau\alpha}^{\sigma}),\end{aligned}$$

en este caso, la derivada de Lie de entre dos campos  $U = \hat{u}^{\mu}X_{\mu}$ , y  $V = \hat{v}^{\mu}X_{\mu}$  es

$$\mathcal{L}_U V = [U, V] = (\hat{u}^{\mu}(X_{\mu}\hat{v}^{\lambda}) - \hat{v}^{\mu}(X_{\mu}\hat{u}^{\lambda}) + \hat{u}^{\mu}\hat{v}^{\nu}C_{\mu\nu}^{\lambda})X_{\lambda},$$

donde  $C_{\mu\nu}^{\lambda}$  se denominan coeficientes de estructura. En cosmología, los coeficientes de estructura se utilizan para definir el tipo de homogeneidad del espacio.

La conexión permite también construir el tensor de curvatura de Riemann  $R^{\lambda}_{\mu\nu k}$  a partir de la métrica  $g_{\mu\nu}$ , y sus derivadas.  $R^{\lambda}_{\mu\nu k}$  se define de la siguiente manera

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}. \quad (1.2.4)$$

Contrayendo los índices  $\rho$  y  $\mu$  del tensor del Riemann se obtiene el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}, \quad (1.2.5)$$

y contrayendo el Ricci con la métrica  $g^{\mu\nu}$ , se obtiene el escalar de curvatura [37]

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (1.2.6)$$

### 1.2.2. Ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein se pueden obtener a partir de la acción de Hilbert  $S_H$

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1.2.7)$$

donde  $g$  es el determinante de  $g_{\mu\nu}$ ,  $R$  es el escalar de curvatura, y  $d^4x$  es el elemento de volumen del espacio tiempo. Las ecuaciones de movimiento se obtienen con la variación de  $S_H$  respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Reescribiendo el escalar de curvatura  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  y tomando la derivada funcional de la ec. (1.2.7)

$$\begin{aligned}\delta S_H &= \int \delta(d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) + \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) + \int d^4x R (\delta \sqrt{-g}).\end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Variando el triple producto de la contracción  $\delta g^{\mu\nu} = \delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta})$ , y usando la propiedad de simetría de  $g_{\mu\nu}$

$$\delta g^{\mu\nu} = 2(\delta g^{\mu\nu}) + g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(\delta g_{\alpha\beta}),$$

reescribiendo la ecuación anterior se tiene que

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(\delta g_{\alpha\beta}), \quad (1.2.9)$$

o en forma covariante

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}(\delta g^{\alpha\beta}). \quad (1.2.10)$$

Por otro lado, para calcular la variación del determinante  $\delta\sqrt{-g}$  que aparece en el tercer término de la ec. (1.2.8) se utiliza la siguiente identidad

$$\ln(\det(M)) = \text{Tr}(\ln(M)), \quad (1.2.11)$$

donde  $M$  es una matriz cuadrada con determinante diferente de cero. Utilizando la métrica  $g_{\mu\nu}$  en lugar de la matriz cuadrada  $M$  en la ecuación (1.2.11) se tiene

$$\ln(g) = \text{Tr}(\ln(g_{\mu\nu})), \quad (1.2.12)$$

donde  $\det(g_{\mu\nu}) = g$ . Desarrollando la variación  $\delta$  de ambos lados de la ecuación anterior se llega a

$$\delta(g)\frac{1}{g} = \text{Tr}\left(\frac{1}{g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}\right), \quad (1.2.13)$$

despejando  $\delta(g)$

$$\delta(g) = g \text{Tr}(g^{\mu\nu}(\delta g_{\mu\nu})) = g(g^{\mu\nu}(\delta g_{\mu\nu})),$$

sustituyendo la ec. (1.2.10) en la ecuación anterior

$$\delta(g) = -g(g^{\mu\nu}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}(\delta g^{\alpha\beta})) = -g(g_{\alpha\beta}(\delta g^{\alpha\beta})). \quad (1.2.14)$$

Por otra parte, la variación de  $\delta\sqrt{-g}$  es

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{\partial}{\partial g}\sqrt{-g}\delta g = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g, \quad (1.2.15)$$

combinando las ec. (1.2.14) y ec. (1.2.15)

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}). \quad (1.2.16)$$

La variación de  $\delta R_{\mu\nu}$  se obtiene variando primero el tensor de Riemann  $\delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu}$

$$\begin{aligned} \delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} &= \partial_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) + (\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma})\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}) \\ &- \partial_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}) - (\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma})\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}), \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

desarrollando la derivada covariante de  $\nabla(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu})$ , despejando  $\partial_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu})$ , y sustituyendola en la ecuación anterior se obtiene la variación del tensor de Riemann

$$\delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}),$$

y contrayendo los índices  $\rho$  y  $\Lambda$  se obtiene la variación del tensor de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}).$$

Finalmente, es necesario obtener la variación de  $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$  de la ecuación anterior. Sin embargo, el primer término de la ec. (1.2.8) se puede reescribir como

$$\int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) - g^{\mu\nu} \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu})), \quad (1.2.18)$$

utilizando la relación  $\nabla_{\lambda}(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) = g^{\mu\nu} \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) + \delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \nabla_{\lambda} g^{\mu\nu}$  y la compatibilidad de la métrica  $\nabla_{\lambda} g^{\mu\nu} = 0$ , la ec. (1.2.18) se lee de la siguiente forma

$$\int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_{\lambda}(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) - \nabla_{\nu}(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu})),$$

renombrando los índices mudos  $\lambda \rightarrow \sigma$  del primer término y  $\nu \rightarrow \sigma$  del segundo

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\sigma}((g^{\mu\nu} \delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}) - (g^{\mu\sigma} \delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu})). \quad (1.2.19)$$

La ecuación anterior es una integral de la derivada covariante de un vector sobre todo el espacio. El teorema de Stokes establece que la ec. (1.2.19) es igual a la integral sobre la frontera en el infinito, y dado que el valor en el infinito es cero, el primer término de la ec. (1.2.8) no contribuye nada a la variación total [37]. La variación total de la acción de Hilbert es entonces

$$\delta S_H = \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) + \int d^4x R (\delta \sqrt{-g}).$$

Sustituyendo la ec. (1.2.16) en la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S_H &= \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) + \int d^4x R \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu})\right) \\ &= \int \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} = 0, \end{aligned}$$

cancelando la integral con la derivada funcional de la métrica y despejando se obtienen las ecuaciones de Einstein en el vacío [37]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0.$$

Agregando la contribución de materia  $S_M$  a la acción de Hilbert se tiene  $S = \frac{1}{16\pi G} S_H + S_M$ , y calculando la variación  $\delta S$  utilizando el procedimiento anterior se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein para fuentes de materia [37]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.2.20)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento. Las ecuaciones anteriores pueden pensarse como un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden el cual contiene dieciséis elementos de los cuales solo diez son independientes, seis de las ecuaciones proporcionan la dinámica del espacio tiempo mientras que los cuatro restantes son constricciones que determinan las condiciones iniciales del sistema de ecuaciones [37]. Otra de las propiedades de las ecuaciones de Einstein es que nos proporcionan una relación matemática entre la geometría del espacio y su densidad de energía, esta última está codificada en el tensor de energía y momento el cual varía dependiendo del modelo que se desea estudiar [40].

### 1.2.3. El tensor de materia y la ecuación de estado

El tensor de materia  $T_{\mu\nu}$  que aparece en el lado derecho las ecuaciones de Einstein (1.2.20) permite cuantificar la cantidad de flujo de energía y de momento que producen los campos de partículas en una región del espacio-tiempo [39]. Cada uno de los componentes de  $T^{\mu\nu}$  posee un significado físico. Por una parte, la componente  $T^{00}$  representa la densidad de energía de la materia, mientras que las componentes  $T^{0j}$  son el flujo de energía en cada una de las direcciones espaciales. Por otro lado, las componentes  $T^{k0}$  representan las densidades de momento en cada una de las coordenadas espaciales. Finalmente, las componentes  $T^{kj}$  del tensor son los flujos de los componentes de momento a través de cada una de las coordenadas [39].

Una manera de obtener una generalización del tensor  $T_{\mu\nu}$  es a partir de la derivada total del Lagrangiano  $\mathcal{L}$ , el cual es una función de los campos  $\psi^\alpha$ , sus velocidades  $\psi^\alpha_{,\mu}$ , y de las coordenadas  $x^\mu$ . La derivada total de  $\mathcal{L}$  es

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\alpha} \frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\alpha_{,\mu}} \frac{\partial\psi^\alpha_{,\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta^\mu_\nu. \quad (1.2.21)$$

Sustituyendo la generalización de las ecuaciones de Lagrange (1.1.6) para campos clásicos

$$\frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\alpha_{,\mu}} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\alpha} = 0, \quad (1.2.22)$$

en la ecuación (1.2.21), y reescribiendo las segundas derivadas parciales de cada término se llega a

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\nu} = \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\alpha_{,\mu}} \right) \psi^\alpha_{,\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\alpha_{,\mu}} \psi^\alpha_{,\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\nu}.$$

Asumiendo que el Lagrangiano  $\mathcal{L}$  no depende explícitamente de las coordenadas  $x^\nu$ , el tercer término del lado derecho de la ecuación es cero. Reescribiendo los primeros dos términos como la derivada de un producto se tiene que

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\nu} = \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\alpha_{,\mu}} \psi^\alpha_{,\nu} \right).$$



Finalmente, utilizando la regla de la cadena en el lado izquierdo y factorizando la derivada  $\frac{d}{dx^\mu}$  de ambos términos se llega a

$$\frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha_{,\mu}} \psi^\alpha_{,\nu} - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu \right) = 0.$$

La ecuación anterior implica la existencia de un tensor de rango (1, 1) el cual contiene la información de la densidad y el flujo de energía del espacio-tiempo. El tensor  $T^\mu_\nu$  está definido por la siguiente ecuación

$$T^\mu_\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha_{,\mu}} \psi^\alpha_{,\nu} - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu.$$

Algunos ejemplos del tensor de energía-momento son el del campo escalar  $\phi$ , y el del campo electromagnético libre [41]

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu &= \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\phi_{,\sigma} \phi_{,\sigma} - m^2 \phi^2), \\ T^\mu_\nu &= F^{\sigma\mu} F_{\sigma\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\sigma\rho} F_{\sigma\rho}. \end{aligned}$$

donde  $\phi_{,\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \phi$  y  $F^{\sigma\mu}$  es el tensor del electromagnetismo de Faraday.

En cosmología se suele utilizar polvo o un fluido perfecto como fuente de materia, en este caso, el tensor  $T^{\mu\nu}$  está representado por [37]

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu &= \rho U^\mu U_\nu, \\ T^\mu_\nu &= (\rho + p) U^\mu U_\nu + p \eta^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.2.23}$$

donde  $U$  es un campo vectorial tipo-tiempo que representa la cuadrivelocidad del fluido,  $\rho$  y  $P$  son funciones escalares que describen la densidad de energía y la presión del fluido [42].

Otra ecuación que relaciona la energía y la presión de un sistema es la ecuación de estado (EOS por sus siglas en inglés), esta contiene la información de la densidad de energía y la presión de la materia que llenan el universo. En cosmología, la EOS suele ser de la forma [40]

$$P = \omega \rho, \tag{1.2.24}$$

donde  $P$  y  $\rho$  son la presión y la densidad de energía de la materia.  $\omega$  es un parámetro adimensional con valor de  $\omega = 1/3$  para partículas ultra-relativistas, y  $\omega = 0$  para materia ordinaria [40]. Particularmente, para describir la energía oscura se suele utilizar a la constante cosmológica  $\Lambda$  con la EOS  $\omega = p/\rho = -1$ .

Se han estudiado generalizaciones de la EOS para describir diferentes escenarios cosmológicos, por ejemplo, para estudiar modelos cosmológicos hidrodinámicamente inestables [43] y para describir cosmologías de Friedmann con viscosidad de Bulk [44, 45]

## 1.3. Cosmología

La cosmología nos brinda información de cómo pudo ser el universo en el pasado, proporciona una explicación para el presente, y permite predecir su destino. El origen de la cosmología moderna se le atribuye a Einstein con el desarrollo de la relatividad general y su intento de describir el cosmos. En su modelo cosmológico relativista, Einstein consideró tres características que debía poseer el universo. La primera se conoce como el principio cosmológico y establece que el universo es homogéneo e isotrópico a gran escala; la segunda fue asumir que el universo posee una geometría espacial cerrada con curvatura positiva similar a una esfera; y la tercera fue considerar que el universo era estático, es decir, no existía la evolución espacial. Sin embargo, sus ecuaciones describían un universo dinámico, y debido a la incompatibilidad con su modelo introdujo una constante para forzar al espacio a permanecer estático conocida como la constante cosmológica  $\Lambda$ . En 1917 De Sitter logró describir un universo vacío en expansión al obtener otra solución de las ecuaciones de campo considerando la existencia de la constante cosmológica. Años más tarde en 1922 y 1927 respectivamente, Friedmann y Lemaître encontraron de manera independiente la solución para un universo con materia, y fue este último el primero en considerar que el universo se encontraba en expansión [42]. En el año de 1929 se obtuvo la evidencia de que el universo se encuentra en expansión gracias a una publicación en donde el astrónomo Edwin Hubble mostró la correlación entre las distancias aparentes de las galaxias y su velocidad de recesión [46].

Posteriormente, en 1946, ya confirmado que el universo se encontraba en expansión, George Gamow desarrolló la teoría del Big Bang utilizando principios de la física nuclear y de la cosmología de Friedmann. La teoría del Big Bang establece que, en el pasado, el contenido de materia del universo debió concentrarse en una pequeña región del espacio en donde la materia se comportó como un fluido cósmico con una densidad de energía infinita, a esta característica se le conoce como singularidad espacial [47]. En la cosmología moderna, la existencia de una singularidad es un problema debido a que las ecuaciones de la relatividad general dejan de ser aplicables, como consecuencia, es necesario desarrollar una formulación en la mecánica cuántica que permita obtener una descripción física del espacio en  $t = 0$ . El problema de la singularidad se presenta al inicio del tiempo cósmico, y en algunos modelos al final cuando el contenido de materia provoca un recolapso del espacio [14].

### 1.3.1. Dinámica de un universo plano, homogéneo e isotrópico

Para describir la expansión del universo se utiliza una función adimensional que permite conocer la distancia física entre dos observadores del espacio tiempo conocida como el factor de escala  $a(t)$ . Con el factor  $a(t)$  y su derivada temporal  $\dot{a}(t)$  se construye el parámetro de Hubble  $H(t)$  para un universo homogéneo e isotrópico.  $H(t)$  es una medida de la tasa de expansión del espacio, y está definido por [48]

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}.$$

La separación entre dos eventos en un espacio tiempo plano, homogéneo e isotrópico está determinada por el elemento de línea  $ds^2$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(dx^0)^2 + a(t)^2((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2).$$

La dinámica descrita por la métrica (1.3.1) se obtiene al resolver las ecuaciones de campo de Einstein (1.2.20). Utilizando la ec. (1.2.1) y la métrica (1.3.1) se obtienen los símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= 0, \\ \Gamma_{00}^i &= 0, \\ \Gamma_{0i}^0 &= \Gamma_{i0}^0 = 0, \\ \Gamma_{ij}^0 &= \delta_{ij}a\dot{a}, \\ \Gamma_{0j}^i &= \Gamma_{j0}^i = \delta_{ij}\frac{\dot{a}}{a}, \\ \Gamma_{jk}^i &= 0.\end{aligned}$$

Con estos valores para la conexión  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  se construye el tensor de Riemann  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ , y de él se obtiene tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ . Las componentes no nulas del tensor de Ricci son

$$\begin{aligned}R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= \delta_{ij}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2).\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

Contrayendo  $R_{\mu\nu}$  con la métrica  $g^{\mu\nu}$  se obtiene el escalar de curvatura  $R$

$$\begin{aligned}R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} \\ &= 3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] \\ &= 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right].\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

Desarrollando la componente temporal de la ec. (1.2.20) utilizando  $R_{00}$  de (1.3.1) y  $R$  de (1.3.2) se tiene que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}T_{00}.\tag{1.3.3}$$

Si el contenido de materia en el universo es un fluido perfecto, el tensor  $T_{\mu\nu}$  está definido por la siguiente ecuación

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + p\eta_{\mu\nu}.$$

donde  $\eta^{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowsky,  $\rho$  es la densidad de energía, y  $p$  es la presión de la materia [37]. La componente  $T_{00}$  es simplemente  $\rho$  y la ec. (1.3.3) se puede reescribir como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho,\tag{1.3.4}$$

o en términos del parámetro de Hubble  $H(t)$

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (1.3.5)$$

La ecuación anterior se conoce como la ecuación de Friedmann, y su solución describe la expansión del universo a través de la evolución del factor de escala  $a(t)$ ; la evolución de  $a(t)$  varía dependiendo del tipo de materia contenido en el espacio. La solución del factor de escala para un universo cuyo contenido de materia es únicamente radiación es,  $a(t) \propto t^{1/2}$ , mientras que, un universo dominado por materia ordinaria no relativista tiene la solución,  $a(t) \propto t^{2/3}$  (figura 1.9) [49].

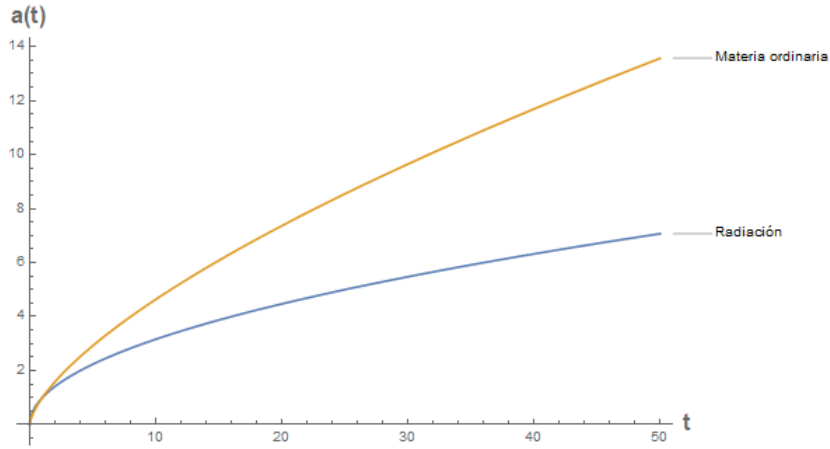


Figura 1.9: Evolución del factor de escala  $a(t)$ . La línea azul corresponde a la evolución  $a(t)$  para un universo cuyo contenido de materia es únicamente radiación, mientras que, la línea amarilla muestra la evolución cuando se considera solamente materia no relativista [46].

### 1.3.2. El modelo estándar cosmológico

El modelo más aceptado para la descripción del universo es el  $\Lambda$ CDM (Lambda cold dark matter) debido a que sus predicciones poseen una gran coincidencia con los datos observacionales [50]. Este modelo es descrito por la métrica FLRW propuesta por Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [12]

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (1.3.6)$$

donde  $k$  es una constante que determina la curvatura del espacio, para  $k = 0$  el universo es plano, con  $k = 1$  es cerrado, y con  $k = -1$  es abierto.

Nuevamente, la dinámica se obtiene resolviendo las ecuaciones de campo de Einstein considerando un fluido cósmico perfecto como contenido de materia. Este fluido es

descrito por un gas perfectamente homogéneo e isotrópico que permea todo el espacio, y donde el tensor de materia  $\hat{T}_{\mu\nu}$  tiene la siguiente forma [51]

$$\hat{T}_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + \left(p - \frac{\Lambda}{8\pi G}\right)g_{\mu\nu}, \quad (1.3.7)$$

en la ecuación anterior,  $\rho$  es la densidad de energía y  $p$  es la presión de la materia. Las componentes no nulas del tensor de Ricci para la métrica (1.3.6) son [37]

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \\ R_{22} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \\ R_{33} &= r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

contrayendo con la métrica  $g^{\mu\nu}$  se obtiene el escalar de curvatura  $R$

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} \\ &= 3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{a^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\ &= 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

De la componente temporal del tensor de Einstein,  $G_{00} = 8\pi G\hat{T}_{00}$ , se obtiene nuevamente la ecuación de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (1.3.10)$$

o en términos del parámetro de Hubble

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}.$$

A diferencia de la ec. (1.3.4), la ecuación anterior incluye un término asociado a la energía oscura  $\Lambda$  y uno a la curvatura del espacio  $k$ . La componente espacial del tensor  $G_{\mu\nu}$  proporciona tres ecuaciones  $G_{11}$ ,  $G_{22}$ , y  $G_{33}$  (una para cada coordenada espacial). Sin embargo, debido a que la materia se distribuye igual en todas direcciones  $G_{11} = G_{22} = G_{33}$ . Desarrollando la componente espacial se obtiene lo siguiente

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{2a^2} - 4\pi Gp + \frac{\Lambda}{2}, \quad (1.3.11)$$

y sustituyendo (1.3.10) en (1.3.11)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.3.12)$$

La ecuación anterior se conoce como la ecuación de Raychaudhuri, y su solución permite conocer la aceleración de  $a(t)$ . Ambas ecuaciones, (1.3.10) y (1.3.12), describen la dinámica del modelo estándar cosmológico  $\Lambda$ CDM a través de la evolución del factor de escala  $a(t)$ .

## 1.4. Discusión del capítulo 1

En este capítulo se realizó un breve estudio bibliográfico de temas fundamentales de mecánica clásica, relatividad, y cosmología. La finalidad de esta sección es proporcionar las matemáticas necesarias para la comprensión de este trabajo de tesis, y sentar la bases para la utilización de un método de aproximación efectivo el cual puede ser aplicado a sistemas cuánticos complejos. Por otra parte, los conceptos y definiciones desarrollados aquí como lo es la conexión, las ecuaciones de Einstein, la ecuación de Friedmann, y la ecuación de Raychaudhuri, sirven como una introducción general para el estudio de modelos cosmológicos, por ejemplo, universos homogéneos e isotrópicos en expansión [51] o modelos más generales como aquellos que describen los efectos de la energía oscura a través de viscosidad [44, 52].

En el siguiente capítulo se revisarán definiciones fundamentales de mecánica cuántica, se introducirá el formalismo del método de aproximación efectiva, y además, se expondrá brevemente su extensión a un método que involucra un potencial efectivo generalizado. Posteriormente, se ejemplificará su aplicación utilizando como base tres modelos cuánticos sencillos.

## Capítulo 2

# Dinámica efectiva del método de aproximación de momentos

### 2.1. Mecánica cuántica

A finales del siglo XIX, el profundo conocimiento que se tenía en las áreas de mecánica clásica, electromagnetismo, y termodinámica, llevó a los científicos a pensar que la física estaba completa [53]. Sin embargo, a pesar del éxito que habían tenido estas disciplinas para explicar algunos eventos naturales, la física de la época fallaba al tratar de describir algunos fenómenos, por ejemplo, el espectro de radiación de un cuerpo negro [54], el efecto fotoeléctrico [55], el movimiento de los electrones al rededor de un núcleo atómico [53], entre otros. Max Planck fue quien propuso un concepto que posteriormente se utilizaría para dar solución a estos problemas. La idea de Planck era que el intercambio de energía entre la radiación y los alrededores era a través de cantidades discretas a las cuales denominó cuantos de energía [56]. Los cuantos son el producto de una constante universal  $h$  (Conocida como la constante de Planck), y de la frecuencia  $\nu$  del sistema en cuestión [56]. Con la introducción de este nuevo concepto fue posible obtener una explicación de los fenómenos que no podían ser descritos por la física clásica.

Para el año de 1925 ya se había consolidado la idea de Planck en dos formalismos independientes que forman parte de lo que hoy se conoce como mecánica cuántica [56]. Por una parte, el físico Erwin Schrödinger había desarrollado una formulación a partir de la mecánica ondulatoria para describir el movimiento de las partículas microscópicas, esto mediante la interpretación de la función de onda  $\psi$ . En esta representación, los observables físicos como la posición y el momento son independientes del tiempo, son los estados sobre los cuales actúan los observables los que evolucionan. Por otro lado, Werner Heisenberg había desarrollado una formulación en donde los operadores físicos son representados como matrices, y la dinámica de sistemas microscópicos se obtiene al resolver un problema de eigen-valores. A diferencia de la formulación de Schrödinger, en esta representación los observables dependen del tiempo y por lo tanto evolucionan, mientras que, los estados se mantienen fijos [57]. Posteriormente, Paul Dirac demostró que ambas representaciones son equivalentes y son dos casos particulares



de un formalismo más abstracto de operadores lineales en un espacio vectorial [58].

## 2.2. El teorema de Ehrenfest

En notación de Dirac, la ecuación de Schrödinger de la ec. (A.0.1), y su correspondiente del espacio dual son

$$|\dot{\psi}\rangle = \frac{-i}{\hbar} H|\psi\rangle \leftrightarrow \langle\dot{\psi}| = \langle\psi|\frac{i}{\hbar}H, \quad (2.2.1)$$

La evolución temporal del valor esperado de un operador  $\hat{A}$  que no depende explícitamente del tiempo es

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \langle\dot{\psi}|\hat{A}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{A}|\dot{\psi}\rangle$$

donde  $\psi$  es la función de onda inicial con respecto a la cual evoluciona el operador  $\hat{A}$ . Sustituyendo (2.2.1) en la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle &= -\frac{i}{\hbar}\langle\psi|\hat{A}H - H\hat{A}|\psi\rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar}\langle[\hat{A}, H]\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

La relación anterior se conoce como el teorema de Ehrenfest, y nos permite obtener la dinámica de los valores esperados de observables [59]. Si el Hamiltoniano es el de una partícula sujeta a un potencial  $V(\hat{x})$  tal que

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + V(\hat{x}), \quad (2.2.3)$$

la evolución los operadores de posición  $\hat{x}$ , y momento  $\hat{p}$ , están determinados por las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle &= -\frac{i}{\hbar}\langle[\hat{x}, H]\rangle = \frac{\langle\hat{p}\rangle}{m}, \\ \frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle &= -\frac{i}{\hbar}\langle[\hat{p}, H]\rangle = -\left\langle\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{x}}\right\rangle. \end{aligned}$$

Con estas dos relaciones se puede construir el análogo cuántico de la segunda ley Newton

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{x}\rangle = -\left\langle\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{x}}\right\rangle. \quad (2.2.4)$$

Los estados cuánticos que poseen una incertidumbre despreciable, y cuyos operadores de posición, y momento están bien definidos, permiten recobrar las ecuaciones clásicas de movimiento. Para estos estados se tiene que  $\langle\hat{x}\rangle = x$ , y  $\langle\hat{p}\rangle = p$ . Desarrollando el

lado derecho de la ecuación (2.2.4) en series de Taylor al rededor de un punto  $x_0$  inicial, se tiene que

$$-\left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x_0} \right\rangle - \langle (x - x_0) \rangle \left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} \right\rangle - \frac{1}{2} \langle (x - x_0)^2 \rangle \left\langle \frac{\partial^3 V}{\partial x_0^3} \right\rangle - \dots,$$

donde el segundo término del lado derecho es cero. Reescribiendo la ecuación anterior en términos de la fuerza  $F(x) = -V'(x)$  se llega a

$$\langle F(x) \rangle = F(\langle x_0 \rangle) + \frac{1}{2} \langle (\Delta x)^2 \rangle F''(\langle x_0 \rangle) + \dots,$$

donde  $\Delta x = x - x_0$  es la dispersión de la función de onda. Cuando  $\Delta x$  es despreciable, la fuerza que experimenta una una partícula cuántica es exactamente igual a la de una partícula clásica en el punto inicial  $x_0$ . Sin embargo, cuando  $\Delta x$  es significativa, los demás términos del lado derecho de la ecuación contribuyen en el comportamiento cuántico de la partícula, por lo que, pueden ser considerados como correcciones del sistema clásico [60].

## 2.3. Método efectivo de aproximación por momentos

En mecánica cuántica usual, la evolución se determina a partir de la ecuación de Schrödinger  $\hat{H}\psi = E\psi$  donde  $\hat{H}$  es el operador Hamiltoniano actuando sobre la función de onda  $\psi$ , y  $E$  son los eigenvalores energía. En esta formulación no es posible obtener una interpretación clásica de variables de configuración, toda la información del sistema está codificada en la función de onda. Sin embargo, es posible aplicar el teorema de Ehrenfest y con ello obtener una ecuación de evolución efectiva por medio del Hamiltoniano  $H_Q$ , que depende de valores esperados de los observables  $\langle \hat{X} \rangle$  y  $\langle \hat{Y} \rangle$ , y de dispersiones cuánticas (o momentos)  $G^{a,b}$  [61]. La dinámica de este sistema efectivo se obtiene por medio de la siguiente relación

$$\{\langle \hat{f} \rangle, \langle \hat{g} \rangle\} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{f}, \hat{g}] \rangle. \quad (2.3.1)$$

Para un par de grados de libertad los momentos se definen como<sup>1</sup>

$$G^{a,b} := \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^a (\hat{q} - \langle \hat{q} \rangle)^b \rangle_{Weyl}, \quad (2.3.2)$$

donde el subíndice *Weyl* significa completamente simetrizado<sup>2</sup>. El bracket de Poisson entre las variables clásicas y las  $G^{a,b}$  es

$$\begin{aligned} \{G^{a,b}, q\} &= 0, \\ \{G^{a,b}, p\} &= 0, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>El formalismo generalizado para este método se puede revisar en la referencia [18].

<sup>2</sup>Para dos variables canónicas  $q$  y  $p$  se tiene que  $\langle qp \rangle_{Weyl} = \langle qp + pq \rangle / 2$ .

y entre los momentos se tiene

$$\begin{aligned} \{G^{a,b}, G^{c,d}\} &= adG^{a-1,b}G^{c,d-1} - bcG^{a,b-1}G^{c-1,d} \\ &+ \sum_n \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{n-1} K_{abcd}^n G^{a+c-n,b+d-n}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

con  $n$  siendo la suma que va de  $1 < n < \text{Min}(a+c, b+d, a+b, c+d)$  tomando solamente los números impares.  $K_{abcd}^n$  se define como

$$\begin{aligned} K_{abcd}^n &:= \sum_{m=0}^n (-1)^m m!(n-m)! \binom{a}{m} \binom{a}{n-m} \times \binom{c}{n-m} \binom{d}{m} \\ &= 2^n \sum_{m=0}^n (-1)^m C_{ad}^m C_{bc}^{n-m}, \end{aligned}$$

donde los coeficientes  $C_{kn}^d$  son

$$C_{kn}^d := \frac{n!k!}{(n-d)!(k-d)!(2d)!!} = \frac{d!}{2^d} \binom{n}{d} \binom{k}{d}.$$

La elección de los momentos  $G^{a,b}$  no es arbitraria, estas variables están sujetas al principio de incertidumbre de Heisenberg [18]

$$G^{2,0}G^{0,2} - (G^{1,1})^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (2.3.4)$$

En esta formulación efectiva  $H_Q$  se define como el Hamiltoniano del análogo clásico aumentado con dispersiones cuánticas como variables dinámicas

$$H_Q = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{1}{a!b!} \frac{\partial^{a+b} H}{\partial p^a \partial q^b} G^{a,b}, \quad (2.3.5)$$

donde el primer término de la serie con  $a = 0$ , y  $b = 0$  de la ecuación anterior es el análogo del Hamiltoniano clásico  $H$ . En general para  $k$  pares de grados de libertad  $H_Q$  es

$$H_Q = \sum_{a_1, b_1}^{\infty} \cdots \sum_{a_k, b_k}^{\infty} \frac{1}{a_1!b_1! \cdots a_k!b_k!} \frac{\partial^{a_1+b_1+\cdots+a_k+b_k} H}{\partial q_1^{a_1} \partial p_1^{b_1} \partial q_k^{a_k} \partial p_k^{b_k}} G^{a_1, b_1, \dots, a_k, b_k}. \quad (2.3.6)$$

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de este Hamiltoniano efectivo forman por lo general un sistema de ecuaciones con un número infinito de grados de libertad que es imposible de resolver completamente, y que describe la evolución efectiva del sistema en cuestión. A diferencia de la teoría cuántica completa, las ecuaciones efectivas permiten obtener una solución parcial a través de truncamientos consistentes que reducen los infinitos grados de libertad a un número finito [62]. Las condiciones iniciales para los

momentos se calculan a partir de una función de onda Gaussiana  $\psi_\sigma$  como condición inicial

$$\psi_\sigma(\hat{q}) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\sigma}} \exp\left\{-\frac{(\hat{q} - \langle\hat{q}\rangle)^2}{2\sigma^2} + \frac{i\hat{q}\langle\hat{p}\rangle}{\hbar}\right\}, \quad (2.3.7)$$

donde el punto máximo de este pulso Gaussiano está determinado por los valores esperados de  $\langle\hat{q}\rangle$ , y  $\langle\hat{p}\rangle$ . Los momentos iniciales se obtienen a través de la siguiente ecuación

$$G^{a,b} \equiv \sum_{d=0}^{\text{Min}(a,b)} (-i\hbar)^a C_{ab}^d \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x} \psi^*(\hat{x})(\hat{x} - \langle\hat{x}\rangle)^{b-d} \left(\frac{d}{d\hat{x}} - i\frac{\langle\hat{p}\rangle}{\hbar}\right)^{a-d} \psi(\hat{x}),$$

donde  $\psi^*$  es el complejo conjugado de la función de onda. En general, para un pulso Gaussiano se tiene que

$$G^{a,b} = 2^{-(a+b)} \hbar^a \sigma^{b-a} \frac{a!b!}{(a/2)!(b/2)!}, \quad (2.3.8)$$

la ecuación anterior se cumple únicamente cuando  $a$  y  $b$  son pares, en cualquier otro caso  $G^{a,b} = 0$ . Las dispersiones  $G^{a,b}$  saturan el principio de incertidumbre de Heisenberg

$$G^{2,0} G^{0,2} = \frac{\hbar^2}{4}.$$

En esta formulación efectiva, el orden de los momentos en  $a$  y  $b$  son del orden de  $(a+b)/2$  en  $\hbar^3$

$$G^{a,b} \propto \hbar^{\frac{(a+b)}{2}}.$$

Al considerar únicamente los momentos de segundo orden es posible observar modificaciones importantes del sistema clásico. Sin embargo, no se puede obtener la información completa. A través de un cambio de los momentos  $G^{a,b}$  a sistemas de pares canónicos  $s_i$  y  $p_{s_i}$  se construye un potencial efectivo generalizado que evita truncamientos [7]. Este potencial se define como

$$V_{All}(q, s) = \frac{1}{8s^2} + \frac{1}{2}[V(q+s) + V(q-s)]. \quad (2.3.9)$$

donde  $V(q)$  es el potencial clásico del sistema. En general se tiene que [63]

$$V_{All}(x_i, s_j) = \sum_{i=1}^3 \frac{U}{2s_i^2} + \frac{1}{8}[V(x_i + s_i) + V(x_i - s_i)]. \quad (2.3.10)$$

Particularmente, este método de aproximación tiene un amplio rango de aplicación, por ejemplo, ha sido utilizado para definir un tiempo de tunelaje a través de barreras de potencial [63], ha permitido estudiar el efecto túnel cuántico de manera efectiva [19], y ha sido aplicado en un modelo cosmológico de lazos en LQC con constante cosmológica [20].

---

<sup>3</sup>En [62] se establece que los estados Gaussianos que satisfacen esta relación se denominan estados semiclásicos.

### 2.3.1. Análisis efectivo del oscilador armónico cuántico

En una dimensión, el Hamiltoniano del oscilador armónico cuántico posee solamente un par de variables canónicas, y esta definido por la ecuación (A.1.1)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2. \quad (2.3.11)$$

Utilizando la ec. (2.3.5) con un truncamiento a segundo orden se obtiene el Hamiltoniano efectivo  $H_Q$

$$H_Q = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \frac{G^{2,0}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2G^{0,2}. \quad (2.3.12)$$

Las ecuaciones de movimiento se calculan a partir de la ecuación (A.0.18)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \frac{\hat{p}_x}{m}, \\ \dot{\hat{p}}_x &= -m\omega^2\hat{x}, \\ \dot{G}^{2,0} &= \frac{1}{2}m\omega^2 \{G^{2,0}, G^{0,2}\}, \\ \dot{G}^{1,1} &= \frac{1}{2m} \{G^{1,1}, G^{2,0}\} + \frac{1}{2}m\omega^2 \{G^{1,1}, G^{0,2}\}, \\ \dot{G}^{0,2} &= \frac{1}{2m} \{G^{0,2}, G^{2,0}\}. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Los brackets de Poisson del sistema anterior se pueden obtener a partir de la ec. (2.3.3), o utilizando la definición de las dispersiones  $G^{a,b}$  y la ec. (2.3.1). Para un truncamiento a segundo orden el álgebra requerida es la siguiente

$$\begin{aligned} \{G^{0,2}, G^{1,1}\} &= 2G^{0,2}, \\ \{G^{1,1}, G^{2,0}\} &= 2G^{2,0}, \\ \{G^{0,2}, G^{2,0}\} &= 4G^{1,1}, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

reescribiendo (2.3.13) se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{G}^{2,0} &= -2m\omega^2G^{1,1}, \\ \dot{G}^{1,1} &= \frac{1}{m}G^{2,0} - m\omega^2G^{0,2}, \\ \dot{G}^{0,2} &= \frac{2}{m}G^{1,1}. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

De este sistema de ecuaciones se observa que para el oscilador armónico efectivo, las dispersiones  $G^{a,b}$  evolucionan de manera independiente a los operadores clásicos de posición y momento. La dinámica del operador de posición se obtiene resolviendo

$$\ddot{\hat{x}} + \omega^2\hat{x} = 0,$$

y del sistema (2.3.15) se tiene que los momentos satisfacen las siguientes relaciones [64]

$$\begin{aligned} G^{2,0} &= -m^2\omega^2(C \sin(2\omega t) - D + E \cos(2\omega t)), \\ G^{1,1} &= m\omega(C \cos(2\omega t) - E \sin(2\omega t)), \\ G^{0,2} &= C \sin(2\omega t) + D + E \cos(2\omega t). \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Utilizando el resultado anterior y el principio de incertidumbre (ec. (2.3.4)), se tiene que

$$D^2 \geq \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2} + C^2 + E^2, \quad (2.3.17)$$

y para  $C = E = 0$

$$D \geq \frac{\hbar}{2m\omega}. \quad (2.3.18)$$

Particularmente para oscilador armónico, los momentos contribuyen a la energía del sistema [64], de modo que

$$E_{Gs} = \frac{1}{2}G^{2,0} + \frac{1}{2}m\omega^2G^{0,2}, \quad (2.3.19)$$

o escrito de otra forma, utilizando (2.3.16)

$$E_{Gs} = m\omega^2D, \quad (2.3.20)$$

sustituyendo (2.3.18) en la ecuación anterior se obtiene la contribución mínima de los momentos al oscilador armónico efectivo

$$E_{Gs} = \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad (2.3.21)$$

este resultado es exactamente igual al de la energía del estado basal del oscilador armónico cuántico[64].

Generalmente, cuando se trabaja con sistemas más complejos, las ecuaciones de movimiento son altamente acopladas y no lineales por lo que es necesario proporcionar una solución numérica. Las condiciones iniciales para los momentos se pueden obtener directamente realizando el producto

$$\hat{G}^{a,b} = \langle \psi | (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^a (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^b | \psi \rangle,$$

donde  $\psi$  corresponde a la función de onda de la ec. (2.3.7), o utilizando la ec. (2.3.8). Para un truncamiento de segundo orden se tiene que

$$G^{2,0} = \frac{\hbar^2}{2\sigma^2}, \quad G^{1,1} = 0, \quad G^{0,2} = \frac{\sigma^2}{2}. \quad (2.3.22)$$

donde  $\sigma$  es la dispersión de la función de onda  $\psi$ . La dinámica del oscilador armónico efectivo se muestra en las figuras (2.1, 2.2).

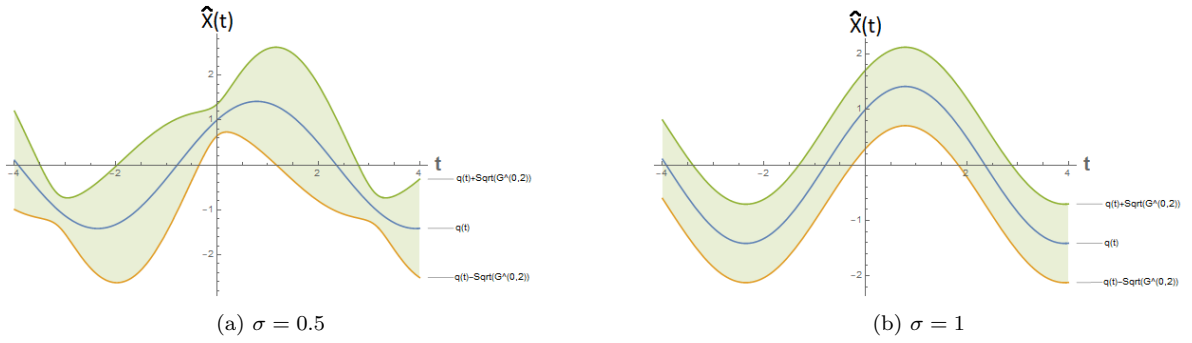


Figura 2.1: Evolución del valor esperado de  $\hat{x}$  y la incertidumbre de la posición para diferentes valores de  $\sigma$ .

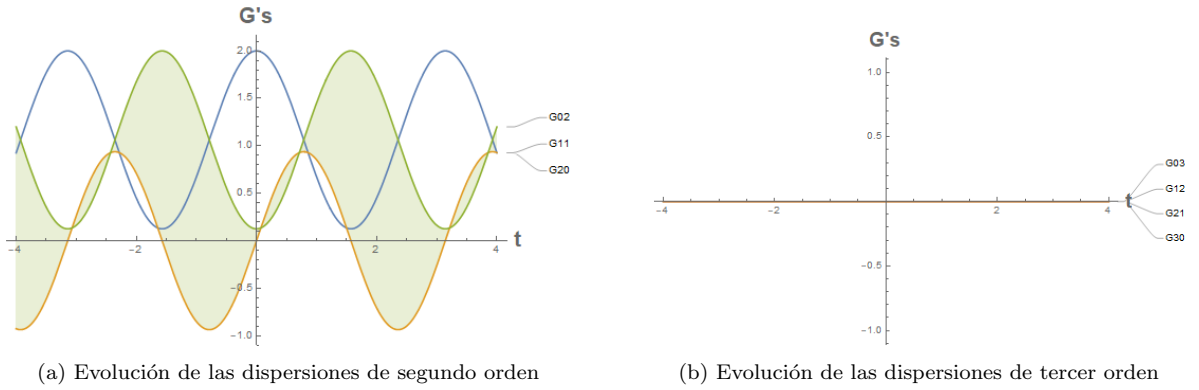


Figura 2.2: Evolución de los momentos  $G^{a,b}$  del oscilador armónico efectivo para diferentes ordenes de truncamiento.

En las figuras de la imagen (2.1) se muestra que la oscilación del valor esperado de la posición del oscilador armónico efectivo es similar a la dinámica obtenida de las soluciones clásicas de movimiento, esto debido a que los momentos de (2.3.13) están completamente desacoplados de las variables  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$ . La dinámica obtenida corresponde a los estados coherentes del oscilador armónico cuántico [65], es decir, la función de onda oscila constantemente manteniendo su centro en una posición igual al de una partícula clásica. Además, se observa la naturaleza probabilística de la mecánica cuántica a través de la incertidumbre de la posición generada a partir de la trayectoria  $\hat{x} \pm \sqrt{G^{2,0}}$ . Finalmente, en la figura (2.2) se muestra la evolución de las dispersiones cuánticas para truncamientos de segundo y de tercer orden.

### 2.3.2. Análisis efectivo del péndulo cuántico

El Hamiltoniano clásico del péndulo es de la forma [60]

$$H_p = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos(\theta)), \quad (2.3.23)$$

donde  $m$  es la masa,  $l$  su longitud, y  $\theta$  es el ángulo que forma con la vertical. Las ecuaciones clásicas del movimiento para este sistema son

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{ml^2}, \\ \dot{p}_\theta &= -mgl \sin(\theta),\end{aligned}\tag{2.3.24}$$

derivando  $\dot{p}_\theta$ , y sustituyendo en la ecuación de  $\dot{\theta}$  se tiene que

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0.$$

Para ángulos pequeños con  $\sin(\theta) = \theta$ , la ecuación anterior se reduce a la del oscilador armónico clásico. En la figura 2.3 se muestra la dinámica del péndulo clásico.

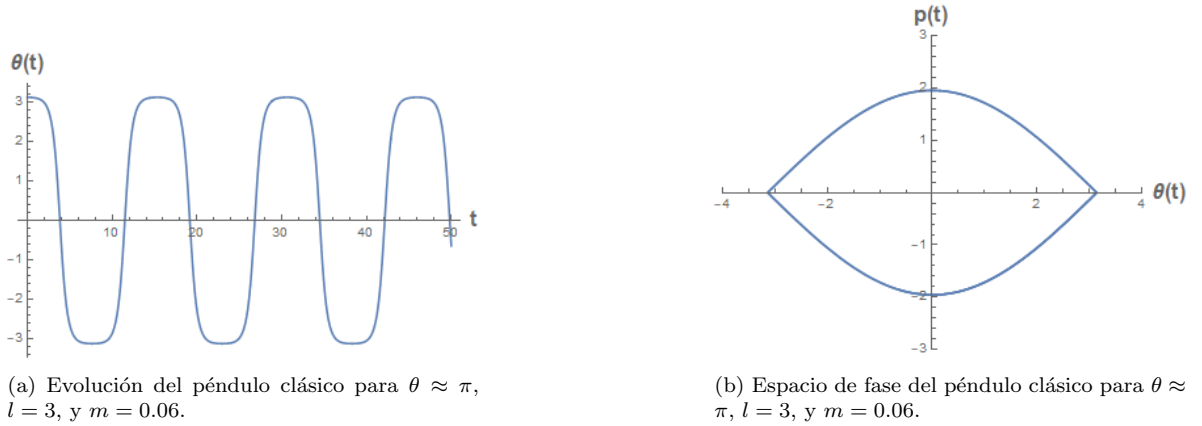


Figura 2.3: Evolución del péndulo clásico.

El análogo cuántico de la ec. (2.3.23) se obtiene al promover las variables de posición y momento a operadores

$$\hat{H}_{\hat{p}} = \frac{\hat{p}_\theta^2}{2ml^2} + mgl \left(1 - \cos(\hat{\theta})\right),\tag{2.3.25}$$

desarrollando a segundo orden se obtiene el Hamiltoniano efectivo  $H_p$

$$H_p = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos(\theta)) + \frac{1}{2ml^2}G^{0,2} + \frac{1}{2}mgl \cos(\theta)G^{2,0},$$

con la dinámica determinada por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{ml^2}, \\ \dot{p}_\theta &= -mgl \sin(\theta) \left(1 - \frac{1}{2}G^{2,0}\right), \\ \dot{G}^{2,0} &= \frac{2}{ml^2}G^{1,1}, \\ \dot{G}^{1,1} &= \frac{1}{ml^2}G^{0,2} - mgl \cos(\theta)G^{2,0}, \\ \dot{G}^{0,2} &= -2mgl \cos(\theta)G^{1,1}.\end{aligned}\tag{2.3.26}$$



A diferencia de (2.3.13), para el péndulo efectivo, las ecuaciones de movimiento entre las variables  $\theta$  y  $P_\theta$  están acopladas con las de las dispersiones cuánticas  $G^{a,b}$ . En el límite semiclásico donde  $\hbar$  es despreciable, la dinámica que se obtiene es similar a la del sistema clásico (figura(2.4)).

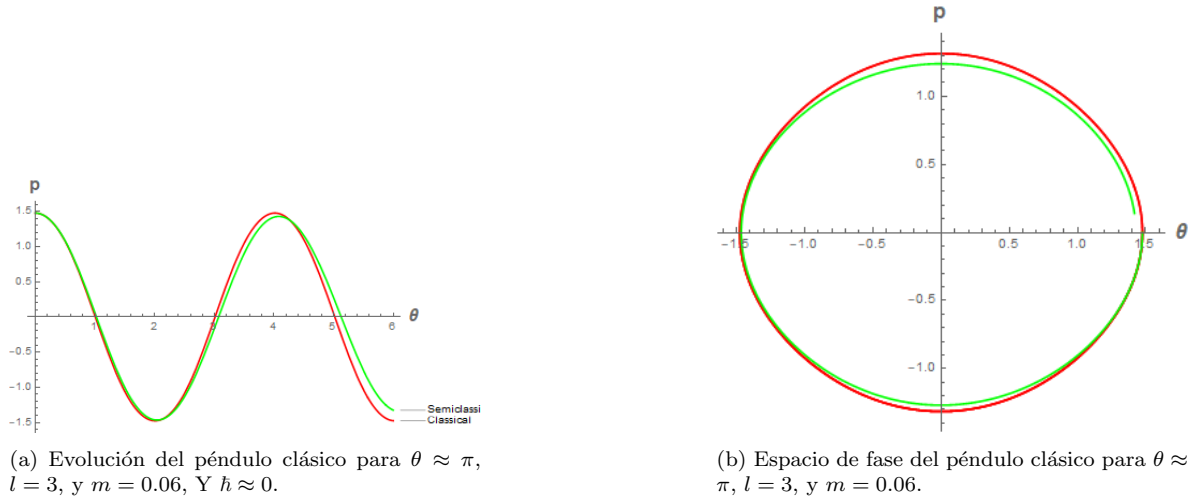


Figura 2.4: Evolución del péndulo cuántico en el límite semiclásico con  $\hbar \approx 0$ . En color rojo se muestran las trayectorias clásicas, y en color azul las trayectorias efectivas. En la imagen se observa que cuando se toma el límite  $\hbar \approx 0$ , la dinámica efectiva es similar a la dinámica clásica.

En las figuras (2.5) y (2.6) se muestra la dinámica efectiva de momentos del péndulo cuántico. Debido al acoplamiento entre las ecuaciones dinámicas (2.3.26), la evolución

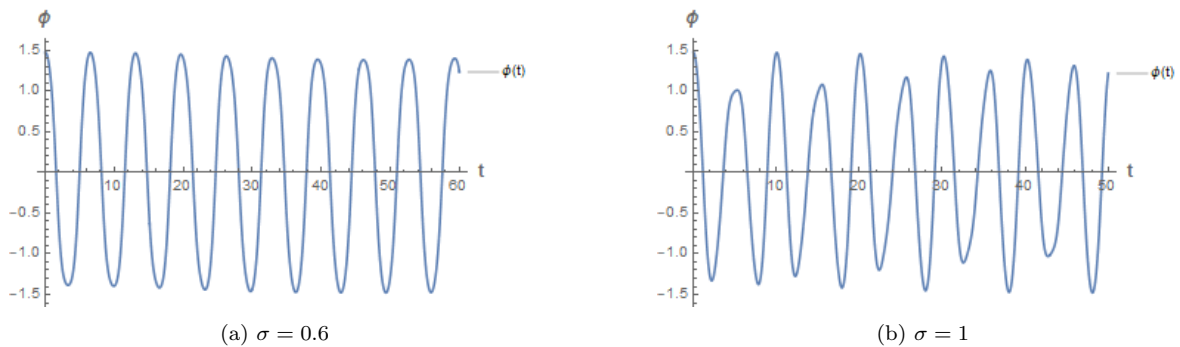


Figura 2.5: Evolución efectiva de momentos del péndulo cuántico para diferentes valores de  $\sigma$ . En la imagen se observa que a medida que aumenta el valor de la dispersión  $\sigma$ , también lo hace la modificación de la trayectoria efectiva.

de los momentos afecta directamente el comportamiento clásico de  $\theta$  modificando su trayectoria, y por tanto el espacio de fase. Particularmente, para este ejemplo se observa que a medida que aumenta la dispersión  $\sigma$ , también lo hace la incertidumbre de la posición.

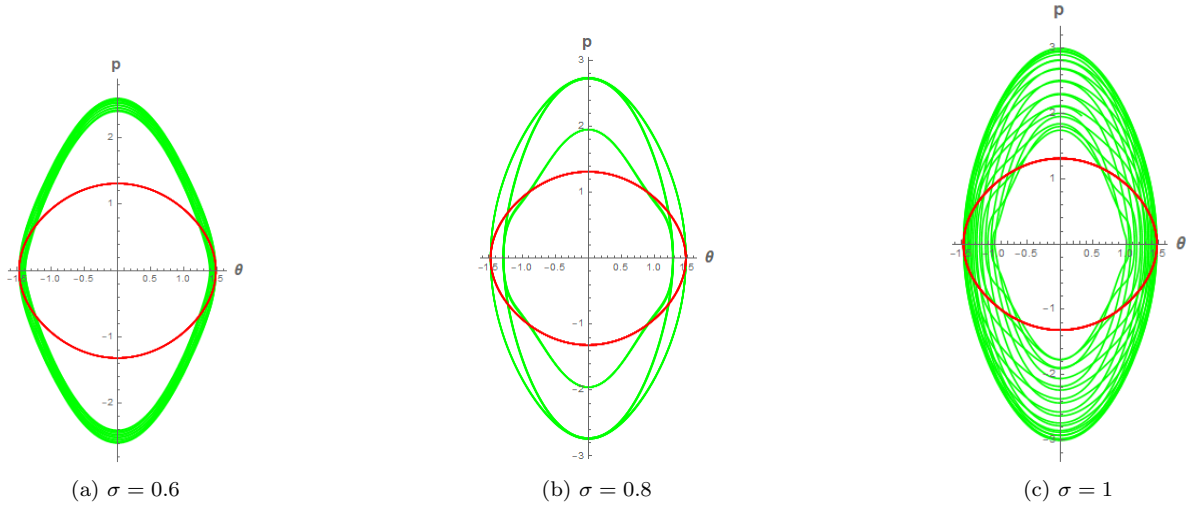


Figura 2.6: Evolución del espacio de fase del péndulo efectivo de momentos. En color rojo se muestra la trayectoria clásica y en verde las trayectorias efectivas. En la imagen se observa que la trayectoria efectiva describe un anillo el cual incrementa su grosor a medida que aumenta el valor de la dispersión  $\sigma$ .

### Potencial efectivo del péndulo cuántico

Además de la aproximación de momentos, es posible obtener dinámica efectiva desarrollando el potencial generalizado (2.3.9) en donde la información cuántica está contenida en un nuevo par de variables canónicas  $s_i$  y  $p_{s_i}$ . Desarrollando la ec. (2.3.9) para el Hamiltoniano (2.3.25) se tiene que

$$V(\theta, s) = \frac{1}{8s^2} + mgl [1 - \cos(\theta) \cos(s)]. \quad (2.3.27)$$

Con este potencial se construye el Hamiltoniano efectivo  $H_p^A$

$$H_p^A = \frac{p_\theta^2 + p_s^2}{2ml^2} + \frac{1}{8s^2} + mgl [1 - \cos(\theta) \cos(s)], \quad (2.3.28)$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{ml^2}, \\ \dot{P}_\theta &= -mgl \sin(\theta) \cos(s), \\ \dot{s} &= \frac{p_s}{ml^2}, \\ \dot{p}_s &= \frac{1}{4s^3} - mgl \cos(\theta) \sin(s). \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

En la figura (2.7) se muestra la dinámica efectiva de  $\theta$  obtenida utilizando el método del potencial a todo orden para distintos valores de  $s$ . En (2.8) se muestra el comportamiento del espacio de fase.

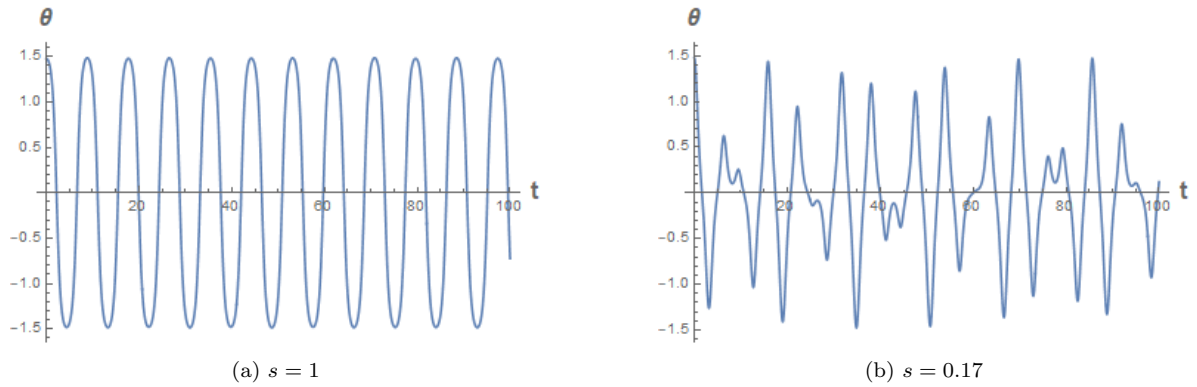


Figura 2.7: Evolución efectiva del péndulo cuántico utilizando el potencial generalizado. En la imagen se observa que los valores pequeños de  $s$ , aumentan la modificación de las trayectorias efectivas.

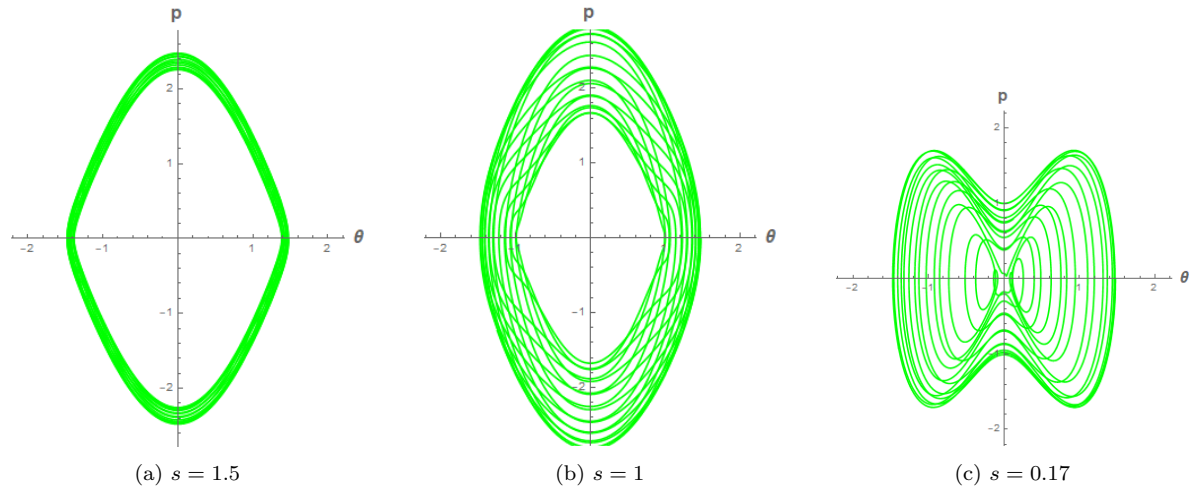


Figura 2.8: Evolución del espacio de fase del péndulo cuántico utilizando el potencial efectivo generalizado. En la imagen se muestra que, para valores de  $s$  pequeños, el comportamiento de una partícula en el espacio de fase es similar al de un atractor.

Particularmente para el péndulo cuántico, en la figura (2.5) se observa que la oscilación efectiva no se mantiene constante, sino que aumenta y disminuye ligeramente con respecto a la amplitud máxima. En el espacio de fase de la figura (2.6) se observa que a medida que se aumenta la dispersión  $\sigma$  la trayectoria está descrita por un anillo mostrando la naturaleza probabilística del sistema. Por otro lado, la dinámica obtenida utilizando el potencial efectivo muestra una modificación mayor en la oscilación del ángulo  $\theta$  (figura (2.7)), en este caso, se observa que, cuando el valor de  $\theta$  está cerca del origen, el ángulo presenta un comportamiento vibratorio y posteriormente alcanza nuevamente su amplitud máxima. En el espacio de fase, la trayectoria efectiva es similar a la de un atractor (figura 2.8).

## 2.4. Modelo estándar cosmológico $\Lambda$ CDM

El modelo cosmológico estándar con materia oscura fría  $\Lambda$ CDM (Lambda cold dark matter), es el más utilizado para describir la estructura y la dinámica del universo a gran escala debido a la gran coincidencia que posee con los datos observacionales [50], y está descrito por la métrica que define un universo homogéneo e isotrópico propuesta por Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [12]. Debido a su importancia en cosmología, el modelo  $\Lambda$ CDM ha sido estudiado ampliamente con diferentes fines, por ejemplo, el estudio de las perturbaciones lineales, escalares y tensoriales en modelos Robertson-Walker espacialmente planos [66] o el análisis de las constricciones observacionales y su dependencia con el parámetro de curvatura utilizando información de supernovas tipo Ia (SNIa) y el telescopio espacial Hubble [67].

Los modelos de gravedad modificada como una extensión del modelo estándar permiten explicar los efectos de la energía y materia oscura, dentro de estas extensiones se encuentra un modelo de gravedad modificada acoplado a un campo escalar que genera dinámicamente la constante cosmológica a partir de las simetrías de Noether [68] y el desarrollo de un modelo de energía-momento construido a partir de una corrección en la acción estándar de Einstein-Hilbert [69]. Además de los modelos de gravedad modificada, se han realizado cambios en la ecuación de estado que generalizan el contenido de materia del universo incluyendo viscosidad [52]. La cosmología clásica permite estudiar estas propiedades a gran escala. Sin embargo, cuando se retrocede la evolución cosmológica hasta llegar a escalas microscópicas las ecuaciones de la relatividad general dejan de ser aplicables y surge una singularidad inicial en donde el radio del universo se hace cero, a esta singularidad se le conoce como el Big Bang [13], por esta razón, se ha optado por describir el universo de manera cuántica mediante el uso de una función de onda en lugar del espacio tiempo clásico [16]. A esta teoría que involucra la descripción cuántica de la cosmología se le conoce como cosmología cuántica [61].

En la búsqueda de una teoría de gravedad cuántica que permita estudiar los fenómenos a escalas microscópicas existen diferentes modelos que comparten características dentro de los cuales destacan la teoría de cuerdas y la gravedad cuántica de lazos (LQG). La teoría de cuerdas ha permitido desarrollar escenarios cosmológicos que evitan la singularidad inicial al considerar las fases de colapso y expansión con horizontes cosmológicos futuros y pasados [70] y tomando en cuenta la presencia de una constante cosmológica negativa localizada en una hipersuperficie dimensional tipo-tiempo [71]. Por otro lado, los modelos derivados de LQG con simetría homogénea e isotrópica, denominados cosmología cuántica de lazos (LQC), también han sido efectivos en la remoción de este tipo de singularidades [72].

La cosmología cuántica permite hacer predicciones sobre la evolución del cosmos a partir de un estado cuántico inicial, este estado puede ser útil para describir características presentes en el universo como la homogeneidad e isotropía a gran escala, o el espectro de radiación que se obtuvo a partir del origen la estructura de la materia [17]. Estudiar el comportamiento cuántico de ciertos modelos cosmológicos presenta generalmente un alto nivel de complejidad, por lo que usualmente es necesario utilizar métodos de aproximación para obtener una solución parcial del sistema. Las aproxi-

maciones efectivas son importantes para estudiar modelos derivados de la gravedad cuántica, ya que proporcionan información importante de sistemas cuánticos complejos [20].

### El modelo clásico $\Lambda$ CDM

La métrica que describe un universo homogéneo e isotrópico en expansión es la propuesta por Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [8]

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \theta d\phi^2) \right], \quad (2.4.1)$$

donde  $k$  es una constante que representa la curvatura del espacio, y  $a(t)$  es una factor adimensional que determina el radio del universo conocido como el factor de escala. Las ecuaciones de campo de Einstein son,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \hat{T}_{\mu\nu} \quad (2.4.2)$$

donde  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + 1/2Rg_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein, y  $\hat{T}_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + (p - \Lambda/(8\pi G))g_{\mu\nu}$  es el tensor de materia para un fluido cósmico [51]. Utilizando la métrica de la ec. (2.4.1) se obtienen dos ecuaciones independientes que determinan la evolución del factor de escala  $a(t)$ . De la componente temporal de las ecuaciones de Einstein  $G_{00}$  se obtiene la ecuación de Friedmann

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}a^2\rho + \frac{\Lambda}{3}a^2 - k, \quad (2.4.3)$$

y de la componente espacial  $G_{ij}$  la ecuación de Raychaudhuri

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}a(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}a. \quad (2.4.4)$$

Las ecuaciones (2.4.3) y (2.4.4) contienen tres incógnitas, el factor de escala  $a(t)$ , la densidad de energía  $\rho(t)$ , y la presión  $p(t)$ . Con el fin de resolver este sistema se introduce una ecuación que relaciona la densidad de energía y la presión de la materia denominada ecuación de estado

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (2.4.5)$$

donde  $\gamma$  es una constante cuyo valor está entre  $1 < \gamma < 4/3$  para partículas relativistas y  $\gamma = 1$  para partículas no relativistas [40]. Combinando la ec. (2.4.3) y ec. (2.4.5) con la ec. (2.4.4) se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{(3\gamma - 2)}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\gamma\Lambda}{2} - \frac{(3\gamma - 2)k}{2a^2}, \quad (2.4.6)$$

absorbiendo las constantes del tercer término en una nueva constante  $K$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{(3\gamma - 2)}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\gamma\Lambda}{2} - \frac{K}{a^2}. \quad (2.4.7)$$

La solución de la ec. (2.4.7) describe la evolución del factor de escala  $a(t)$ . La ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente manera

$$\ddot{a} = f_1(a)\dot{a}^2 + f_2(a), \quad (2.4.8)$$

donde

$$f_1(a) = -\frac{(3\gamma - 2)}{2a}, \quad f_2(a) = \frac{\gamma\Lambda a}{2} - \frac{K}{a}. \quad (2.4.9)$$

Para obtener una formulación Hamiltoniana de este modelo se realiza una transformación de  $a \rightarrow \phi$ ,  $p_a \rightarrow p_\phi$  [51], donde la nueva variable  $\phi$  se define de la siguiente manera

$$\phi \equiv \int \exp\left(-\int f_1(a)da\right)da. \quad (2.4.10)$$

El Hamiltoniano que se obtiene mediante esta transformación es de la forma  $H(\phi, p_\phi) = \frac{1}{2}p_\phi^2 + \hat{V}_\phi$ , donde  $\phi$  y  $p_\phi$  son variables canónicas conjugadas. El potencial  $\hat{V}_\phi(\phi)$  se calcula a partir de la siguiente ecuación

$$\hat{V}_\phi(\phi) = -\int \left[ f_2(a) \exp\left(-\int f_1(a)da\right) \right]_{a \rightarrow \phi} d\phi. \quad (2.4.11)$$

El Hamiltoniano clásico correspondiente al modelo  $\Lambda$ CDM es entonces

$$H_{\Lambda CDM} = \frac{1}{2}p_\phi^2 - \frac{3}{8}\gamma^2\Lambda\phi^2 + \frac{K}{3\gamma - 2} \left(\frac{3\gamma\phi}{2}\right)^{2-4/3\gamma}, \quad (2.4.12)$$

con la función  $\phi(t)$  definida por

$$\phi(t) = \frac{2}{3\gamma}a(t)^{\frac{3\gamma}{2}}, \quad (2.4.13)$$

despejando se obtiene el factor de escala  $a(t)$  en términos de la función  $\phi(t)$

$$a(t) = \left(\frac{3\gamma}{2}\right)^{\frac{2}{3\gamma}} \phi(t)^{\frac{2}{3\gamma}}. \quad (2.4.14)$$

De la ecuación anterior se observa que la relación entre la función  $\phi(t)$  y  $a(t)$  es polinómica, es decir, si la función  $\phi(t)$  crece, también lo hace  $a(t)$ . La dinámica de (2.4.12) se obtiene a través del corchete de Poisson entre las variables canónicas con el Hamiltoniano clásico

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_{\Lambda CDM}\}, \quad \dot{p}_\phi = \{p_\phi, H_{\Lambda CDM}\}, \quad (2.4.15)$$

las ecuaciones de movimiento para  $\phi$  y  $p_\phi$  son

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p_\phi, \\ \dot{p}_\phi &= \frac{3}{4}\gamma^2\Lambda\phi + f_0(\phi), \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

donde la función  $f_0(\phi)$  es

$$f_0(\phi) = -\frac{\gamma K}{(3\gamma - 2)} \left(2 - \frac{4}{3\gamma}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{2 - \frac{4}{3\gamma}} (\gamma\phi)^{1 - \frac{4}{3\gamma}}. \quad (2.4.17)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones anterior de manera numérica se establecen primero las condiciones iniciales. Debido a que el valor de la constante cosmológica es pequeño [73], se establece que  $-0.1 \leq \Lambda \leq 0.1$ ;  $\gamma$  puede tomar valores dentro de un rango de  $1 \leq \gamma \leq 4/3$  dependiendo de si el contenido de materia en el universo es radiación o materia ordinaria. Por último, para el término de curvatura se tiene que  $-1 \leq K \leq 1$ . La evolución de la función  $a(t)$  corresponde a una expansión acelerada cuando la constante cosmológica es positiva, y el contenido de materia del universo es no relativista con  $\gamma = 1$ . En la figura (2.9) se muestra la evolución para diferentes condiciones iniciales de  $\Lambda$ . La comparación de la evolución de la función  $\phi(t)$  para diferentes contenidos de materia se muestra en la figura (2.10). En este caso, se observa que la expansión es un orden de magnitud mayor cuando se utiliza radiación en lugar de materia ordinaria.

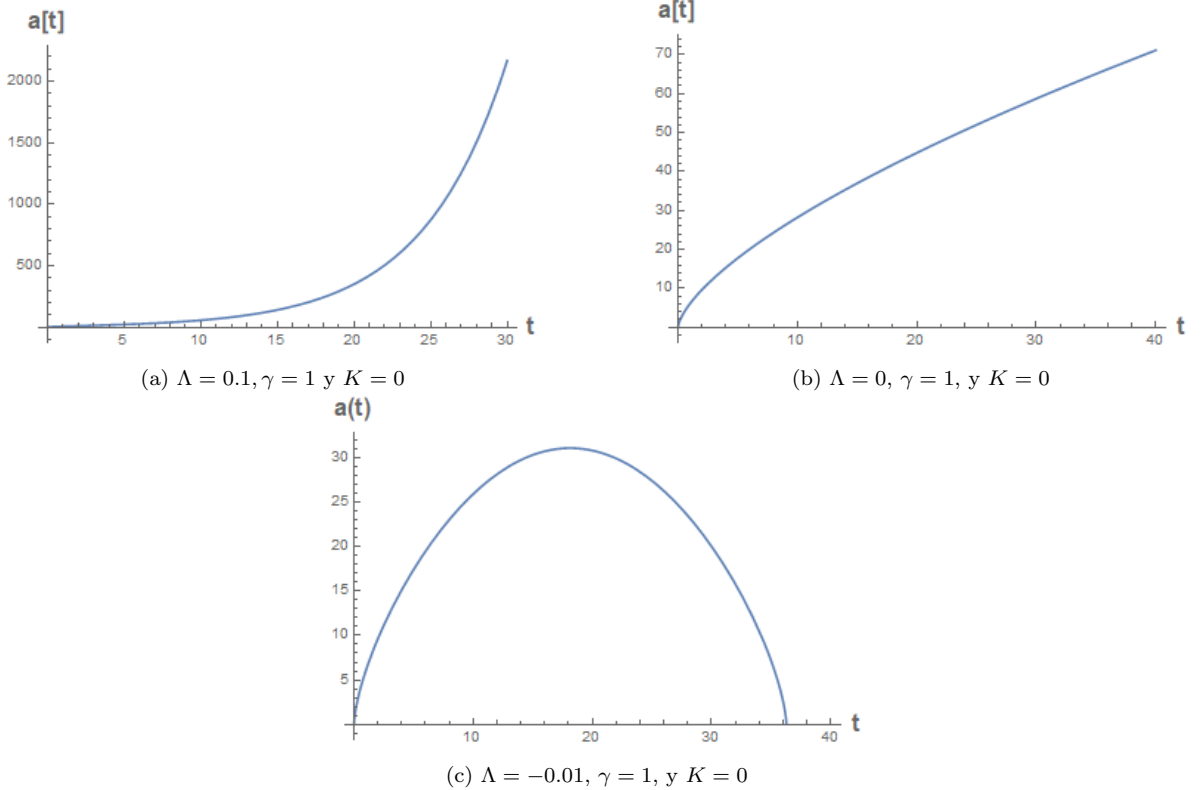


Figura 2.9: Evolución del factor de escala  $a(t)$  para diferentes valores iniciales de la constante cosmológica  $\Lambda$ . En la imágenes se observa que el signo de  $\Lambda$  determina si la evolución del radio del universo  $a(t)$  es acelerada (para  $\Lambda$  positivo), o crece hasta un punto máximo para posteriormente contraerse (para  $\Lambda$  negativo).

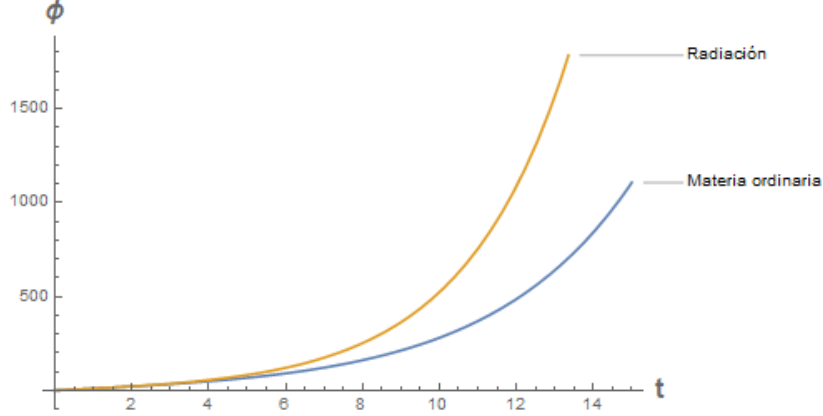


Figura 2.10: Comparación de la evolución de  $\phi(t)$  para un universo con contenido de materia ordinaria con  $\gamma = 1$ , y radiación  $\gamma = 4/3$ . El valor de la constante cosmológica es de  $\Lambda = 0.1$ . En la imagen se observa que la función  $\phi(t)$  es de un orden mayor cuando el contenido del universo es únicamente radiación.

## 2.5. El modelo $\Lambda$ CDM efectivo de momentos

La cosmología cuántica intenta resolver problemas cosmológicos clásicos en regiones pequeñas del espacio con gran cantidad de energía, como la singularidad inicial. El estudio efectivo del modelo  $\Lambda$ CDM permite estudiar el origen del universo mediante el comportamiento del factor de escala  $a(t)$  en tiempos cercanos a  $t = 0$ . Desarrollando a segundo orden el Hamiltoniano clásico  $H_{\Lambda\text{CDM}}$  de la ec. (2.4.12) a través de la ec. (2.3.5) se obtiene  $H_{Q\Lambda}$

$$\begin{aligned} H_{Q\Lambda} &= H_{\Lambda\text{CDM}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_{\Lambda\text{CDM}}}{\partial p_\phi^2} G^{2,0} + \frac{\partial^2 H_{\Lambda\text{CDM}}}{\partial p_\phi \partial \phi} G^{1,1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_{\Lambda\text{CDM}}}{\partial \phi^2} G^{0,2} \\ &= H_{\Lambda\text{CDM}} + \frac{1}{2} G^{2,0} + f_1(\phi) G^{0,2}, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

donde la función  $f_1(\phi)$  es

$$f_1(\phi) = -\frac{3}{4} \gamma^2 \Lambda + \frac{9}{4} \frac{\gamma^2 K}{(3\gamma - 2)} \left(2 - \frac{4}{3\gamma}\right) \left(1 - \frac{4}{3\gamma}\right) \left(\frac{3\gamma\phi}{2}\right)^{-\frac{4}{3\gamma}}. \quad (2.5.2)$$

Las ecuaciones de movimiento obtenidas de (2.5.1) son

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p_\phi \\ \dot{p}_\phi &= \frac{3}{4} \gamma^2 \Lambda \phi + f_0(\phi) - \frac{1}{2} f_2(\phi) G^{0,2} \\ \dot{G}^{2,0} &= -f_1(\phi) G^{1,1} \\ \dot{G}^{1,1} &= G^{2,0} - f_1(\phi) G^{0,2} \\ \dot{G}^{0,2} &= 2G^{1,1}, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$



con

$$f_2(\phi) = -\frac{9}{2} \left( \frac{\gamma^2 K}{(3\gamma - 2)} \right) \left( 2 - \frac{4}{3\gamma} \right) \left( 1 - \frac{4}{3\gamma} \right) \left( \frac{3\gamma\phi}{2} \right)^{-1 - \frac{4}{3\gamma}}, \quad (2.5.4)$$

y  $f_0$  esta dada por la ec. (2.4.17). Nuevamente, las condiciones iniciales para los momentos de segundo orden  $G^{2,0}, G^{1,1}, G^{0,2}$  satisfacen las siguientes ecuaciones

$$G^{2,0} = \frac{\hbar^2}{2\sigma^2}, \quad G^{1,1} = 0, \quad G^{0,2} = \frac{\sigma^2}{2}. \quad (2.5.5)$$

En la imagen (2.11) se muestran las trayectorias efectivas de la función  $a(t)$ , y el cinturón de incertidumbre generado por la dispersión cuántica de la posición  $G^{0,2} := \langle (\hat{q} - q)^2 \rangle$ .

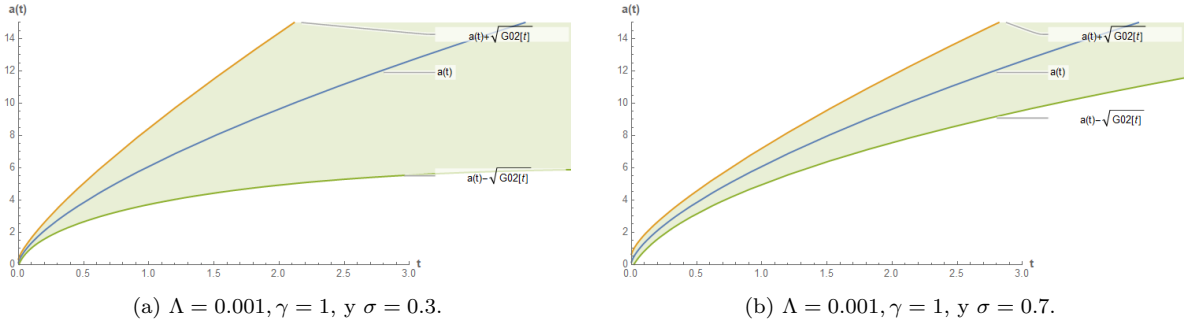


Figura 2.11: Incertidumbre de la posición  $\sqrt{G^{0,2}}$  de la función  $a(t)$  para un universo con contenido de materia no relativista. En las figuras se observa que la incertidumbre se incrementa a medida que transcurre el tiempo sin importar el valor inicial de la dispersión  $\sigma$

Finalmente, en la figura (2.12) se muestra la remoción de la singularidad inicial para diferentes valores de la dispersión  $\sigma$ .

### El modelo $\Lambda$ CDM del potencial efectivo

El término potencial del Hamiltoniano  $H_{\Lambda\text{CDM}}$  (2.4.12) es

$$V(\phi) = -\frac{3}{8}\gamma^2\Lambda\phi^2 + \frac{K}{(3\gamma - 2)} \left( \frac{3\gamma\phi}{2} \right)^{2 - \frac{4}{3\gamma}}. \quad (2.5.6)$$

Desarrollando la ec. (2.3.9) se obtiene el potencial efectivo  $V_A$ . El Hamiltoniano completo a todo orden es

$$H_A = \frac{p_\phi^2 + p_s^2}{2} + V_A, \quad (2.5.7)$$

con  $V_A$  igual a

$$V_A = \frac{1}{8s^2} - \frac{3}{8}\gamma^2\Lambda(\phi^2 + s^2) + \frac{K}{2(3\gamma - 2)} \left( \frac{3\gamma}{2} \right)^{2 - \frac{4}{3\gamma}} \left( (\phi + s)^{2 - \frac{4}{3\gamma}} + (\phi - s)^{2 - \frac{4}{3\gamma}} \right).$$

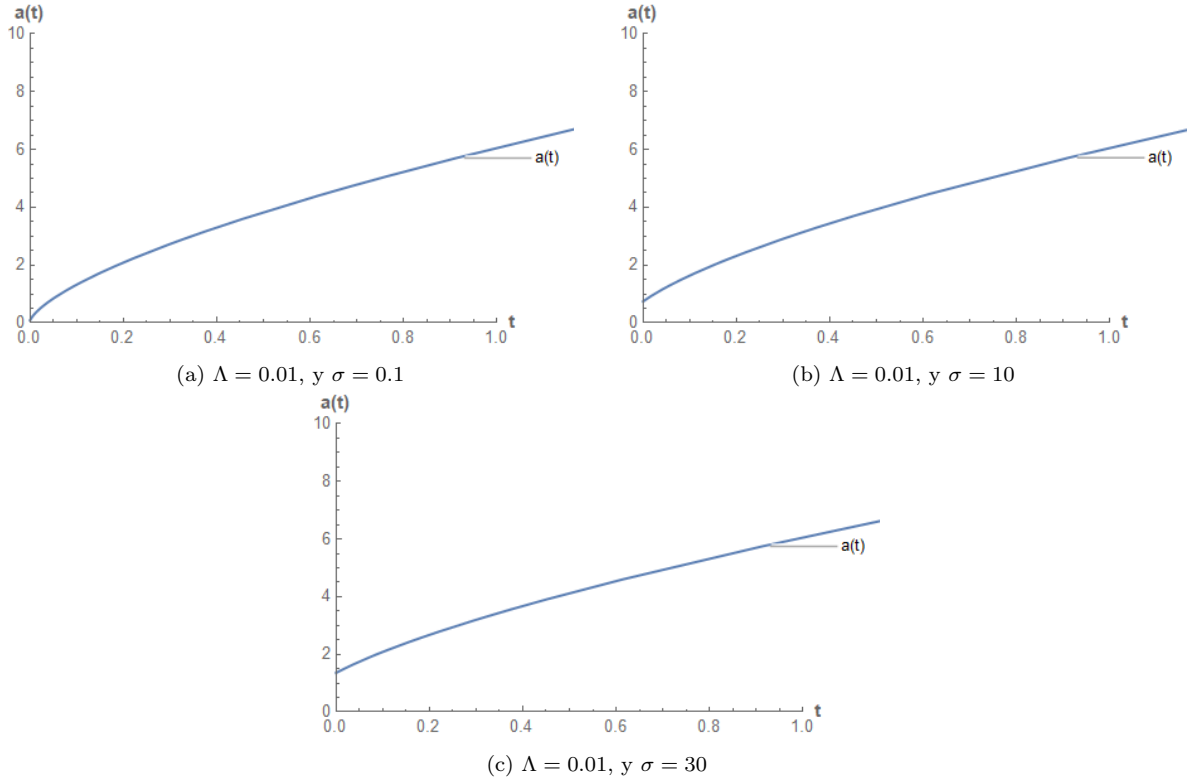


Figura 2.12: Remoción de la singularidad inicial. En la figura (a) se observa que para  $\sigma = 0.1$  el radio del universo  $a(t)$  se vuelve cero en un tiempo  $t = 0$ . Sin embargo, a medida que aumenta el valor de la dispersión  $\sigma$  (figura (b) y (c)), también lo hace el radio  $a(t)$  evitando la singularidad.

Las ecuaciones de movimiento del Hamiltoniano de la ec. (2.5.7) son

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_\phi &= \frac{3}{4}\gamma^2\Lambda\phi + \epsilon_0(\phi, s), \\
 \dot{p}_s &= \frac{U}{Ms^3} + \frac{3}{4}\gamma^2\Lambda s + \epsilon_1(\phi, s), \\
 \dot{\phi} &= p_\phi, \\
 \dot{s} &= p_s,
 \end{aligned}$$

con  $\epsilon_0(\phi, s)$  y  $\epsilon_1(\phi, s)$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_0(\phi, s) &= -\frac{K}{2(3\gamma - 2)} \left(2 - \frac{4}{3\gamma}\right) \left(\frac{3\gamma}{2}\right)^{2-\frac{4}{3\gamma}} \left((\phi + s)^{1-\frac{4}{3\gamma}} + (\phi - s)^{1-\frac{4}{3\gamma}}\right), \\
 \epsilon_1(\phi, s) &= \frac{K}{2(3\gamma - 2)} \left(2 - \frac{4}{3\gamma}\right) \left(\frac{3\gamma}{2}\right)^{2-\frac{4}{3\gamma}} \left((\phi - s)^{1-\frac{4}{3\gamma}} + (\phi + s)^{1-\frac{4}{3\gamma}}\right). \quad (2.5.8)
 \end{aligned}$$

## 2.6. Discusión del capítulo 2

En general, estudiar sistemas cuánticos complejos que sean apegados a la realidad es complicado debido a que usualmente estos son imposibles de resolver exactamente. Debido a esto, es adecuado aplicar métodos de aproximación que permitan generar soluciones parciales del sistema, por ejemplo, la teoría de perturbaciones, y el método WKB. Otra técnica de aproximación son los métodos efectivos.

En esta tesis se trabajó con un método de aproximación efectiva de sistemas cuánticos, que consiste en la construcción de un Hamiltoniano semiclásico ampliado  $H_Q$  con el cual es posible obtener la dinámica del sistema de la manera usual, haciendo uso del corchete de Poisson entre los valores esperados de las variables de configuración y  $H_Q$ . Este Hamiltoniano se define como el Hamiltoniano del análogo clásico aumentado con valores esperados de dispersiones cuánticas (o momentos)  $G^{a,b}$  como variables dinámicas. Los momentos son interpretados como correcciones del sistema clásico, y contienen una parte de la información cuántica, en particular, información de la dispersión de la función de onda. Debido a que  $H_Q$  contiene en general un número infinito grados de libertad, las ecuaciones dinámicas obtenidas son imposibles de resolver de manera completa, y usualmente es necesario realizar truncamientos consistentes en los momentos para obtener un sistema soluble que pueda ser analizado numéricamente. Este método de aproximación describe la dinámica efectiva en el límite semiclásico en donde  $\hbar$  es pequeño, cuando se considera  $\hbar \rightarrow 0$  se recuperan las ecuaciones clásicas de movimiento. Los momentos  $G^{a,b}$  dependen de potencias positivas de  $\hbar$ , por lo que los ordenes superiores tienen una menor contribución al sistema completo.

Los momentos, orden por orden, no forman un sistema clásico canónico ya que, en general, no hay un número par de ellos. Sin embargo, se puede realizar una re-definición de estas variables en términos de pares de variables canónicas  $s_n$ , y  $p_{s_n}$ , y también es posible obtener un potencial efectivo generalizado que evita truncamientos [7, 74].

En la mecánica de Schrödinger, la posición de una partícula no está definida debido a la naturaleza probabilística de la teoría. Sin embargo, la aplicación de este método efectivo a sistemas cuánticos permite recuperar la noción de trayectorias de partículas en mecánica cuántica efectiva.

La aproximación efectiva de momentos y del potencial generalizado, han permitido estudiar sistemas cuánticos interesantes, que van desde el tunelaje cuántico [19], hasta modelos de cosmología cuántica [20], entre otros. En el siguiente capítulo se discute la dinámica efectiva del modelo cosmológico de Bianchi IX, que puede ser interpretado como una generalización del modelo cosmológico homogéneo e isotrópico, ya que incluye anisotropías.

# Capítulo 3

## Estudio efectivo del modelo cosmológico cuántico de Bianchi IX

### 3.1. Cosmología homogénea y el modelo de Bianchi IX

El principio cosmológico establece que el universo es homogéneo e isotrópico a gran escala<sup>1</sup>. La homogeneidad se refiere a que no hay lugares privilegiados, es decir, no hay forma de diferenciar en que parte del espacio se encuentra un observador, y la distribución de la densidad de energía es similar en todas partes (figura 3.1). La isotropía se refiere a que no existen direcciones privilegiadas, estando en un punto del espacio todas las direcciones parecen ser iguales [48]. Los modelos cosmológicos homogéneos

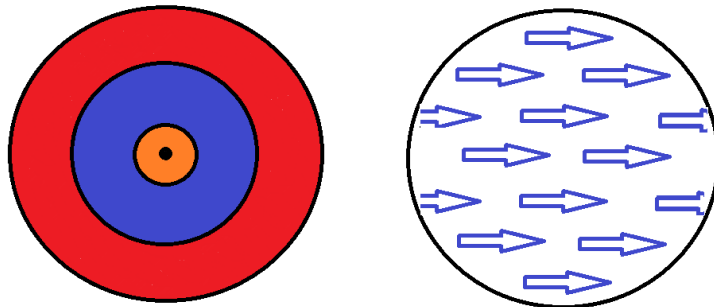


Figura 3.1: Ejemplo de espacios con una distribución isotrópica, inhomogénea (a la izquierda), y homogénea anisotrópica (a la derecha).

e isotrópicos concuerdan con los datos observacionales a gran escala [75, 76], y son

---

<sup>1</sup>Las propiedades de homogeneidad e isotropía se observan en el universo a partir de distancias mayores a los 100 Mega-Parsec [48].

descritos con gran precisión por el modelo FLRW, cuyo elemento de línea es [14]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.1.1)$$

donde la constante  $K$  determina si la topología del espacio tridimensional es abierta con  $K = -1$ , plana con  $K = 0$ , o cerrada con  $K = 1$ . La forma de  $ds^2$  determina las propiedades del espacio. Por ejemplo, la homogeneidad se representa por funciones que dependen únicamente del tiempo (en el caso de la ecuación (3.1.1) la homogeneidad está determinada por el factor de escala  $a(t)$ ), mientras que una métrica diagonal  $g_{ij}$ , representa un espacio isotrópico cuando cada una de sus entradas son idénticas [14].

A pesar de que el universo actual es altamente isotrópico, inicialmente no tuvo por que ser así. La generalización de los modelos FLRW que describen un espacio homogéneo anisotrópico se denominan cosmologías de Bianchi y van desde el tipo  $I$  hasta el tipo  $IX$  [77]. Algunos de estos modelos se reducen a la cosmología FLRW bajo ciertas condiciones, aquellos que no lo hacen se vuelven altamente anisotrópicos a gran escala [78]. En particular, los universos FLRW con curvatura negativa, nula, y positiva corresponden a las cosmologías de Bianchi *Tipo - V*, *Tipo - I*, y *Tipo - IX* respectivamente. Los universos de Bianchi están representados por una variedad  $M$  de dimensión 4 equipada con una métrica  $g_{\mu\nu}$ , en donde el espacio está representado por hipersuperficies que folian la variedad [79], y se clasifican a partir de la elección de las constantes de estructura  $C_{ab}^c$  mencionadas en la sección de relatividad general [77]. Debido a que estos modelos cosmológicos incluyen anisotropías, poseen menos simetrías que la cosmología FLRW, es decir, cuentan con menor cantidad de vectores de Killing linealmente independientes [77]. Los vectores de Killing satisfacen la siguiente ecuación [80]

$$[K_a, K_b] = C_{ab}^c K_c \quad (3.1.2)$$

en donde  $K_a, K_b, K_c$  son vectores de Killing, y  $C_{ij}^k$  son las constantes de estructura. En general, las constantes de estructura se pueden escribir en términos de una matriz diagonal  $n^{ij}$  de la siguiente manera [79]

$$C_{ij}^k = \epsilon_{ijl} n^{kl}, \quad (3.1.3)$$

en donde  $\epsilon_{ijl}$  es el tensor de Levi-Civita. En la tabla (3.1) se muestra la clasificación de los modelos de Bianchi en términos de los componentes  $a_1, a_2$ , y  $a_3$  de la matriz  $n^{kl}$  [79].

Particularmente, para la cosmología del Bianchi  $IX$ , el espacio es invariante ante transformaciones del grupo de rotaciones  $SO(3, R)$ . A diferencia del modelo de Bianchi  $IX$ , un universo invariante ante rotaciones en un solo eje se conoce como universo de Taub [14]. Los universos descritos por las cosmologías tipo Bianchi  $IX$  y Bianchi  $VIII$  son los modelos cosmológicos más importantes porque representan una solución general de las ecuaciones de Einstein cerca de la singularidad inicial [81].

Universos de Bianchi			
Tipo	$n_1$	$n_2$	$n_3$
$I$	0	0	0
$II$	1	0	0
$VI_0$	0	1	-1
$VII_0$	0	1	1
$VIII$	-1	1	1
$IX$	1	1	1

Tabla 3.1: Clasificación de los modelos de Bianchi en términos de las constantes  $n_1$ ,  $n_2$ , y  $n_3$

## 3.2. El modelo Mixmaster clásico

### 3.2.1. Métrica anisotrópica de Kasner

La métrica de Kasner describe el comportamiento de un universo homogéneo anisotrópico en tiempos cercanos de la singularidad inicial. En este modelo cosmológico, la topología del espacio tridimensional es plana [39], y es descrita por el elemento de línea  $ds^2$

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2P_1} dx^2 + t^{2P_2} dy^2 + t^{2P_3} dz^2, \quad (3.2.1)$$

en donde las constantes  $P_1, P_2$  y  $P_3$  se denominan coeficientes de Kasner. Estos determinan de qué manera se contrae y se expande el espacio en cada dirección [39]. Cuando los coeficientes  $P_i$  son iguales la ecuación anterior se reduce a la métrica de la ec. (1.3.1) con  $t^{2P} = a(t)$  la cual describe un universo homogéneo e isotrópico. Los coeficientes  $P_i$  satisfacen las siguientes dos relaciones

$$\begin{aligned} \sum_i P_i &= 1, \\ \sum_i P_i^2 &= 1. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Para un modelo con simetría rotacional en donde  $P_2 = P_3$ , los valores de los coeficientes obtenidos a partir de la ec. (3.2.2) son  $P_2 = P_3 = 2/3$  y  $P_1 = -1/3$ . En particular, estos valores de  $P_i$  permiten al espacio contraerse en una dirección y expandirse en las otras dos [39]. Un universo descrito por la métrica de Kasner permitiría observar corrimientos al rojo debido a la expansión generada por los coeficientes positivos, y un corrimiento al azul por el coeficiente negativo. Sin embargo, en el universo cosmológico actual solo se observan corrimientos al rojo, lo cual puede ser explicado a través de la posible existencia de sistemas de isotropización [82, 83]. Por ejemplo, a medida que se expande el universo, la densidad de energía atribuida a las anisotropías  $\rho_{aniso}$  decae más rápido que la densidad de energía de la materia  $\rho_{matter}$  como se muestra en la siguiente

relación [39]

$$\begin{aligned}\rho_{aniso} &\propto \frac{1}{a^6}, \\ \rho_{matter} &\propto \frac{1}{a^3}.\end{aligned}$$

Otro de los mecanismos de isotropización esta directamente relacionado con los procesos disipativos [84, 85], los efectos de corrimiento al rojo y al azul presentes en la radiación implican un decremento y un incremento de energía respectivamente, por lo que, el intercambio de energía térmica entre estas diferencias de temperatura disminuiría la densidad  $\rho_{aniso}$  [39].

Cerca de la singularidad inicial los coeficientes de Kasner dejan de ser constantes y se vuelven funciones del tiempo [39]. Para tiempos cercanos a  $t = 0$ , los coeficientes  $P_i$  satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}P_1 &= \frac{-u}{1+u+u^2}, \\ P_2 &= \frac{1+u}{1+u+u^2}, \\ P_3 &= \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}.\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

en donde  $u(t)$  es el parámetro de Khalatnikov-Lifshitz.

A partir de la métrica de Kasner se puede obtener un modelo cosmológico anisotrópico más general que involucre curvatura y cuya topología sea la de una esfera. Esta generalización corresponde al modelo anisotrópico de Bianchi IX. Reescribiendo la métrica espacial  $g_{ij}$  de la ec. (3.2.1) en términos de una parametrización  $\alpha(t)$  para el volumen del universo, y  $\beta(t)$  para las anisotropías espaciales, la métrica  $g_{ij}$  es

$$g_{ij} = \exp(2\alpha)(\exp(2\beta))_{ij} \rightarrow (\ln(g))_{ij} = 2\alpha\delta_{ij} + 2\beta_{ij},\tag{3.2.4}$$

donde  $\beta_{ij}$  es una matriz con traza nula  $\text{tr}(\beta_{ij}) = 0$ . Los componentes de  $\beta_{ij}$  satisfacen las siguientes ecuaciones [15]

$$\begin{aligned}\beta_{11} &= \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \\ \beta_{22} &= \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, \\ \beta_{33} &= -2\beta_+,\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

con las nuevas variables  $\beta_{\pm}$  definidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\beta_+ &= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{a_3}{(a_1 a_2 a_3)^{1/3}}\right), \\ \beta_- &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left(\frac{a_1}{a_3}\right),\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

donde  $a_1$ ,  $a_2$ , y  $a_3$  representan el factor de escala en cada una de las direcciones espaciales. En el caso particular donde el universo es completamente isotrópico, es decir, los factores  $a_1$ ,  $a_2$ , y  $a_3$  son iguales, las anisotropías desaparecen [86]. En términos de  $\alpha$ , y  $\beta_{ij}$ , la métrica de la ecuación (3.2.1) es [39]

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\alpha}(e^{2\beta})_{ij}dx^i dx^j.$$

La métrica de la ecuación anterior describe un modelo anisotrópico sin curvatura, y corresponde a un universo tipo Bianchi I [39]. Finalmente, sustituyendo las bases  $dx^i dx^j$  de la ecuación anterior por  $\sigma^i \sigma^j$  se obtiene una métrica que describe un espacio tiempo de hipersuperficies con  $t = cte$  con topología esférica [39]

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + e^{2\alpha}(e^{2\beta})_{ij}\sigma^i \sigma^j, \quad (3.2.7)$$

en donde  $N$  es la función lapso, y  $\sigma^i$  es

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= \cos(\psi)d\theta + \sin(\psi)\sin(\theta)d\phi, \\ \sigma^2 &= \sin(\psi)d\theta - \cos(\psi)\sin(\theta)d\phi, \\ \sigma^3 &= d\psi + \cos(\theta)d\phi. \end{aligned}$$

La raíz cuadrada del determinante de la métrica  $\sqrt{\det(g_{ij})}$  de la ec. (3.2.4) permite cuantificar el volumen del universo  $a(t)$  [87]

$$a(t) = \sqrt{\det(g_{ij})} = \exp(3\alpha). \quad (3.2.8)$$

La relación entre el parámetro  $\alpha$ ,  $\beta_+$ , y  $\beta_-$  con el factor de escala  $a(t)$  es la siguiente [15]

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{1}{3} \ln(a(t)), \\ \beta_+(t) &= \frac{1 - P_3}{2} \alpha(t), \\ \beta_-(t) &= \sqrt{3}(P_1 - P_2) \alpha(t). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

La ecuación (3.2.8) muestra que cuando  $\alpha \rightarrow -\infty$ ,  $a(t) \rightarrow 0$ , lo cual corresponde a la singularidad inicial. Eliminando  $\alpha(t)$  usando las ecuaciones para  $(\beta_+, \beta_-)$  de (3.2.9) se tiene

$$\alpha = \left( \frac{1 - P_3}{2} + \sqrt{3}(P_1 - P_2) \right)^{-1} (\beta_+ + \beta_-), \quad (3.2.10)$$

sustituyendo  $P_1 = P_3 = 2/3$ , y  $P_2 = -1/3$  de la ecuación anterior

$$\alpha = \left( \frac{1 + 6\sqrt{3}}{6} \right)^{-1} (\beta_+ + \beta_-), \quad (3.2.11)$$



usando este resultado para reescribir  $a(t)$  en términos de  $\beta_{\pm}$  en (3.2.8) se obtiene la siguiente relación

$$a(t) = e^{\left(\frac{18}{1+6\sqrt{3}}\right)(\beta_+ + \beta_-)}. \quad (3.2.12)$$

Finalmente, utilizando la métrica de la ec. (3.2.7), la componente 00 de las ecuaciones de Einstein (1.2.20) es [39]

$$3(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_+^2 - \dot{\beta}_-^2) - \frac{1}{2}({}^3R_{IX}) = 8\pi T^{00}, \quad (3.2.13)$$

con

$${}^3R_{IX} = \frac{1}{2}e^{-2\alpha} \text{tr}(2e^{-2\beta_+} - e^{4\beta_-}). \quad (3.2.14)$$

La ec. (3.2.13) representa una ecuación de energía para el modelo de Bianchi IX expresada en un término cinético más potencial [39].

### 3.2.2. Dinámica del Mixmaster

El modelo cosmológico Mixmaster es una generalización del modelo anisotrópico de Kasner que se obtiene a partir de una reformulación de las ecuaciones de Einstein en el formalismo ADM, y permite describir el comportamiento del espaciotiempo cerca de la singularidad inicial [15]. La dinámica es descrita por un Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  que se obtiene a través de la variación de la siguiente acción [15]

$$I = \int dt \left( p_{\alpha} \dot{\alpha} + p_+ d\dot{\beta}_+ + p_- d\dot{\beta}_- - N\mathcal{H} \right), \quad (3.2.15)$$

donde  $p_{\alpha}$ , y  $p_{\pm}$  son los momentos conjugados de  $\alpha$ , y  $\beta_{\pm}$  [86].  $\mathcal{H}$  está definido como

$$\mathcal{H} = \frac{k}{3(8\pi)^2} e^{-3\alpha} (-p_{\alpha}^2 + p_+^2 + p_-^2 + \mathcal{V}), \quad (3.2.16)$$

con

$$\mathcal{V} = \frac{3(4\pi)^2}{k^2} e^{4\alpha} V(\beta_{\pm}). \quad (3.2.17)$$

Particularmente, para el modelo de Bianchi IX, el potencial  $V(\beta_{\pm})$  es [14]

$$V(\beta_{\pm}) = e^{-8\beta_+} - 4e^{-2\beta_+} \cosh\left(2\sqrt{3}\beta_-\right) + 2e^{4\beta_+} \left[ \cosh\left(4\sqrt{3}\beta_-\right) - 1 \right], \quad (3.2.18)$$

este potencial es una función en el espacio de anisotropías  $\beta_+, \beta_-$ , y está representado gráficamente por triángulos equiláteros que evolucionan en el tiempo como se muestra en la figura (3.3). En general,  $\mathcal{H}$  contiene la física de todos los universos de tipo Binachi en el término potencial  $\mathcal{V}$  de la ecuación (3.2.17), en donde a cada modelo de Bianchi

le corresponde un potencial diferente [81]. En la figura (3.2) se muestran las líneas de equipotencial para las cosmologías de Bianchi desde el tipo  $I$  hasta el tipo  $IX$  [14].

La dinámica del Mixmaster se obtiene a través de la variación de (3.2.15) respecto de cada una de las variables e igualando a cero [86]. La variación respecto a  $p_\alpha$  y  $p_\pm$  es

$$\begin{aligned} p_\alpha &= -\frac{6(4\pi)^2}{Nk} e^{3\alpha} \dot{\alpha}, \\ p_\pm &= -\frac{6(4\pi)^2}{Nk} e^{3\alpha} \dot{\beta}, \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

mientras que, la variación con respecto de la función lapso  $N$  genera la restricción Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = 0. \quad (3.2.20)$$

La ecuación anterior se reduce a la versión de (3.2.13) en el vacío cuando se sustituyen los momentos por las velocidades [39]. Resolviendo la ec. (3.2.16) para  $p_\alpha$ , y utilizando la restricción ec. (3.2.20) se tiene que

$$-p_\alpha = H_{IX} = \sqrt{p_+^2 + p_-^2 + \mathcal{V}}, \quad (3.2.21)$$

donde se define  $H_{IX}$  como el Hamiltoniano para el modelo de Bianchi IX [15]. Este Hamiltoniano describe la dinámica del universo representado como una partícula sujeta a un potencial variable en el tiempo. Cerca de la singularidad ( $\alpha \rightarrow -\infty$ ), la velocidad de las anisotropías  $\dot{\beta}$  con respecto a la expansión es [15]

$$\dot{\beta} = \sqrt{\left(\frac{d\beta_+}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_-}{d\alpha}\right)^2}, \quad (3.2.22)$$

donde

$$\dot{\beta}_\pm = \frac{d\beta_\pm}{d\alpha} = \frac{\partial H_{IX}}{\partial p_\pm} = \frac{p_\pm}{H_{IX}}. \quad (3.2.23)$$

Multiplicando (3.2.21) por  $H_{IX}^{-1}$  en ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\frac{p_+^2}{H_{IX}^2} + \frac{p_-^2}{H_{IX}^2} + \frac{3(4\pi)^4}{k^2} H_{IX}^{-2} e^{4\alpha} V(\beta_\pm) = 1, \quad (3.2.24)$$

y restando  $\dot{\beta}^2$  de ambos lados se tiene

$$\frac{3(4\pi)^4}{k^2} H_{IX}^{-2} e^{4\alpha} V(\beta_\pm) = (1 - \dot{\beta}^2), \quad (3.2.25)$$

además

$$\frac{d}{d\alpha} \ln(H_{IX}^2) = 4 \left( \frac{3(4\pi)^4}{k^2} H_{IX}^{-2} e^{4\alpha} V(\beta_\pm) \right). \quad (3.2.26)$$

Si el Hamiltoniano se conserva, entonces  $H_{IX}^2$  es una constante de movimiento y su derivada respecto a  $\alpha$  es igual a 0

$$\frac{d}{d\alpha} \ln(H_{IX}^2) = 0 \rightarrow H_{IX} = Cte. \quad (3.2.27)$$

Comparando las ec. (3.2.25) y ec. (3.2.26) se observa que la velocidad de la partícula cerca de la singularidad es igual a la unidad

$$\dot{\beta} = 1. \quad (3.2.28)$$

Por otro lado, cuando  $\alpha \rightarrow -\infty$  el término potencial de (3.2.21) es despreciable. En este caso cuando  $\mathcal{V}$  es cero, la dinámica es la misma que la de una partícula libre [15]. La ecuación (3.2.21) es entonces

$$H_{IX} = \sqrt{p_+^2 + p_-^2} = Cte, \quad (3.2.29)$$

con las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_{\pm} &= \frac{p_{\pm}}{H_{IX}}, \\ p_{\pm} &= Cte. \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Cuando la partícula se acerca a una de las barras del potencial, este adquiere la forma [15]

$$V(\beta_{\pm}) \approx 1/3e^{-8\beta_{\pm}}, \quad (3.2.31)$$

y justo antes de la interacción, se asume que la posición de la partícula y del potencial son iguales, por lo que,  $\beta_+ \approx \beta_{wall}$ . Utilizando la siguiente relación

$$\frac{3(4\pi)^4}{k^2} H_{IX}^{-2} e^{4\alpha} V(\beta_{\pm}) \approx 1, \quad (3.2.32)$$

donde  $V(\beta_{\pm})$  está dado por (3.2.31), sustituyendo (3.2.31) en (3.2.32), y resolviendo para  $\beta_+$  se llega a que

$$\beta_+ \approx \beta_{wall} = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{8} \ln\left(\frac{k^2}{3(4\pi)^4} H_{IX}^2\right), \quad (3.2.33)$$

derivando con respecto a  $\alpha$  se obtiene la velocidad con la que se alejan las paredes del potencial

$$\dot{\beta}_{wall} = \frac{1}{2}. \quad (3.2.34)$$

Como la velocidad de la partícula  $\dot{\beta}$  es el doble de la velocidad con la que se alejan las paredes del potencial  $\dot{\beta}_{wall}$ , la partícula experimenta rebotes en cada una de las paredes a medida que se retrocede en el tiempo, pasando de un régimen en donde la dinámica está determinada por el potencial  $V \approx 1/3e^{-8\beta_+}$  (Bianchi II) al de una partícula libre (Bianchi I) una y otra vez [15].

### 3.2.3. Solución numérica del Mixmaster

Consideremos el Hamiltoniano de la ec. (3.2.21)

$$H_{IX} = \sqrt{p_+^2 + p_-^2 + \frac{3(4\pi)^2}{k^2} e^{4\alpha} V(\beta_{\pm})}, \quad (3.2.35)$$

donde  $V(\beta_{\pm})$  es el potencial de la ec. (3.2.18). Las ecuaciones clásicas de movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p_x}{H_{IX}}, \\ \dot{y} &= \frac{p_y}{H_{IX}}, \\ \dot{p}_x &= 4 \frac{3(4\pi)^2}{k^2 H_{IX}} e^{4\alpha} \left( e^{-8x} - e^{-2x} \cosh(2\sqrt{3}y) - e^{4x} (\cosh(4\sqrt{3}) - 1) \right), \\ \dot{p}_y &= 4\sqrt{3} \frac{3(4\pi)^2}{k^2 H_{IX}} e^{4\alpha} \left( e^{-2x} \sinh(2\sqrt{3}y) - e^{4x} \sinh(4\sqrt{3}) \right). \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

En donde se han renombrado las variables  $\beta_{\pm} \rightarrow (x, y)$ , y  $p_{\pm} \rightarrow (p_x, p_y)$ . La evolución numérica obtenida del sistema de ecuaciones anterior se muestra en figura (3.4). En ella se observa que a medida que la partícula se acerca a la singularidad inicial, es decir, cuando la trayectoria está cerca del origen, esta experimenta reflexiones en las barreras de potencial. En la figura (3.5) se observa esta misma trayectoria en el espacio tridimensional  $(\beta_+, \beta_-, \alpha)$ .

Particularmente, cuando  $\beta_+ \rightarrow -\infty$  y  $|\beta_- \ll 1|$ , el Hamiltoniano  $H_{IX}$  se reduce a  $H_W$  [15]

$$H_W = \sqrt{p_+^2 + p_-^2 + \frac{3(4\pi)^2}{k^2} e^{4\alpha} e^{-8x}}, \quad (3.2.37)$$

con las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p_x}{H_{IX}}, \\ \dot{y} &= \frac{p_y}{H_{IX}}, \\ \dot{p}_x &= 4 \frac{3(4\pi)^2}{k^2 H_{IX}} e^{4\alpha} e^{-8x}, \\ \dot{p}_y &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

Por otro lado, con  $\beta_+ \rightarrow +\infty$  y  $|\beta_- \ll 1|$ , se tiene  $H_V$  [15]

$$H_V = \sqrt{p_+^2 + p_-^2 + 48 \frac{3(4\pi)^2}{k^2} e^{4\alpha} y^2 e^{4x}}, \quad (3.2.39)$$

con la dinámica representada por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{p_x}{H_{IX}}, \\ \dot{y} &= \frac{p_y}{H_{IX}}, \\ \dot{p}_x &= -96 \frac{3(4\pi)^2 y^2}{k^2 H_{IX}} e^{4\alpha} e^{4x}, \\ \dot{p}_y &= -48 \frac{3(4\pi)^2 y}{k^2 H_{IX}} e^{4\alpha} e^{4x}.\end{aligned}\tag{3.2.40}$$

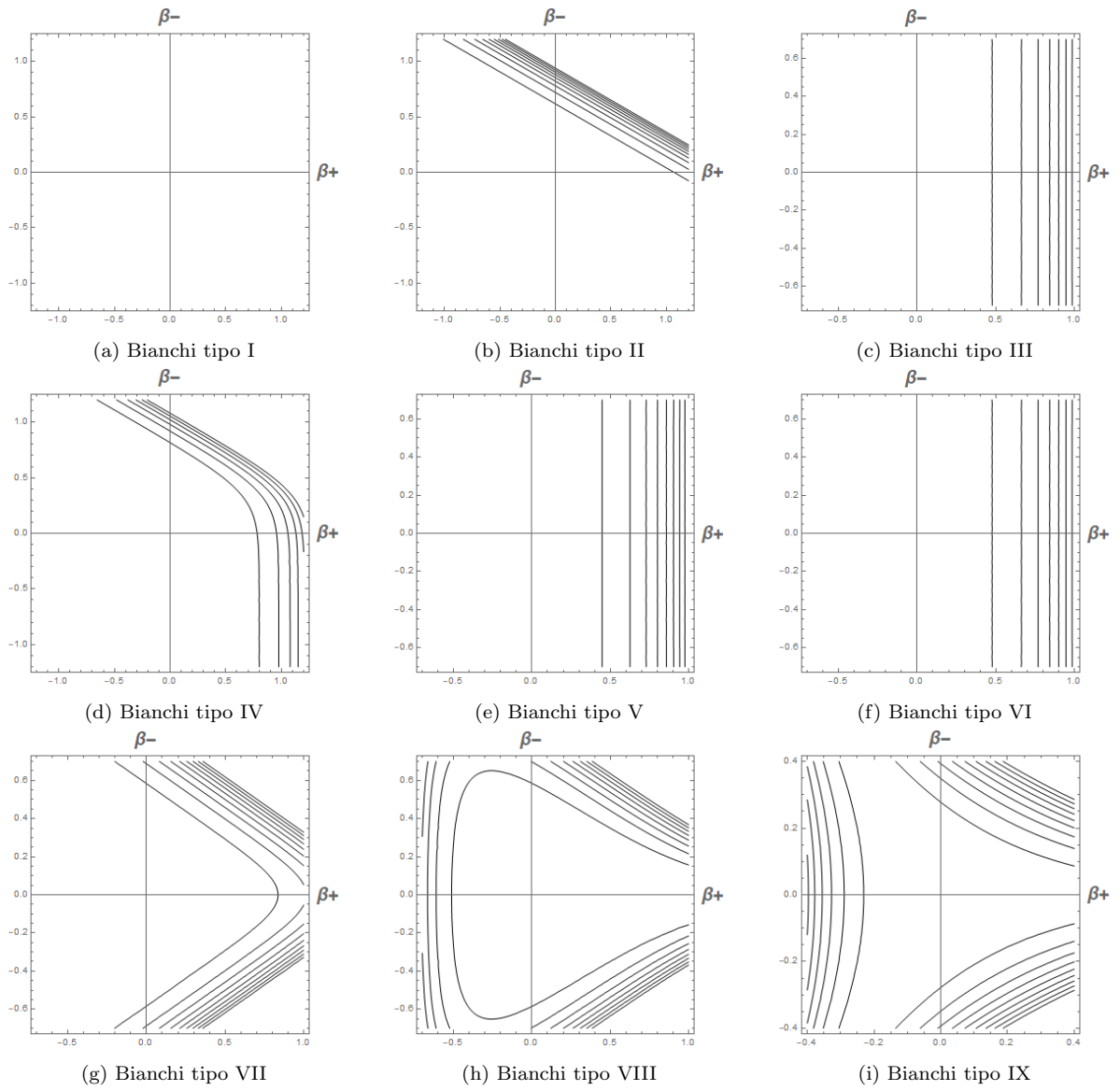


Figura 3.2: Líneas equipotenciales para los universos tipo Bianchi.

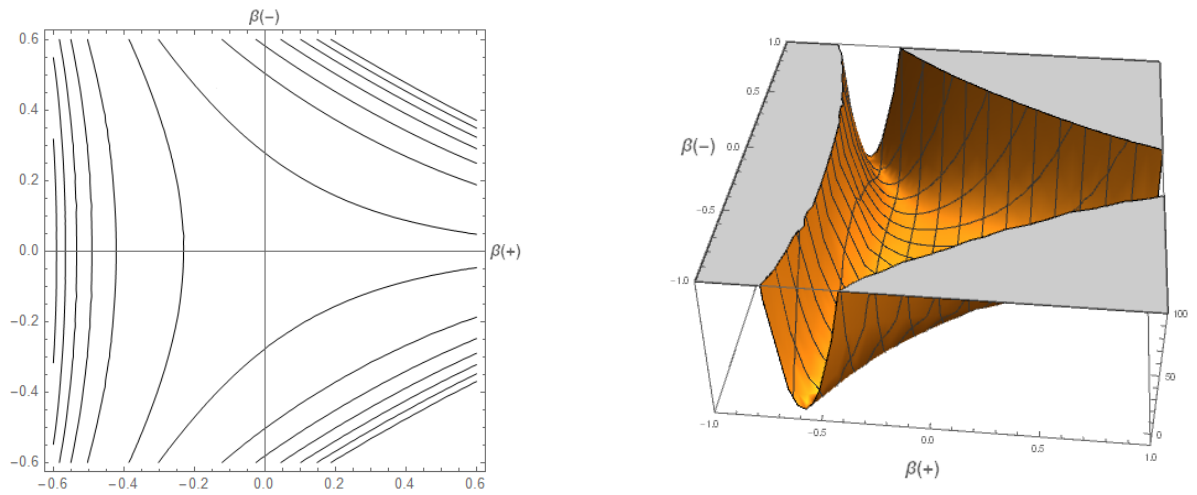
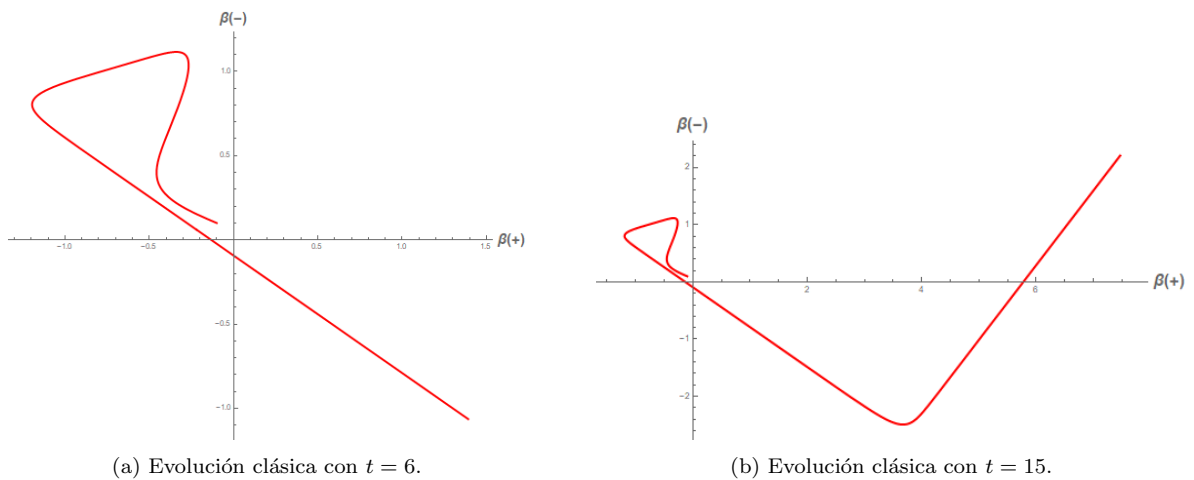


Figura 3.3: Potencial  $V(\beta_+, \beta_-)$  del modelo de IX de Bianchi.  $\beta_+$  y  $\beta_-$  representan las anisotropías del espacio.



(a) Evolución clásica con  $t = 6$ .

(b) Evolución clásica con  $t = 15$ .

Figura 3.4: Evolución de la trayectoria clásica de una partícula sujeta al potencial  $V(\beta_+, \beta_-)$  para diferentes tiempos  $t$ . En la figura se muestra cómo la dependencia temporal de  $V(\beta_+, \beta_-)$  tiene como consecuencia la reflexión en diferentes líneas equipotenciales.

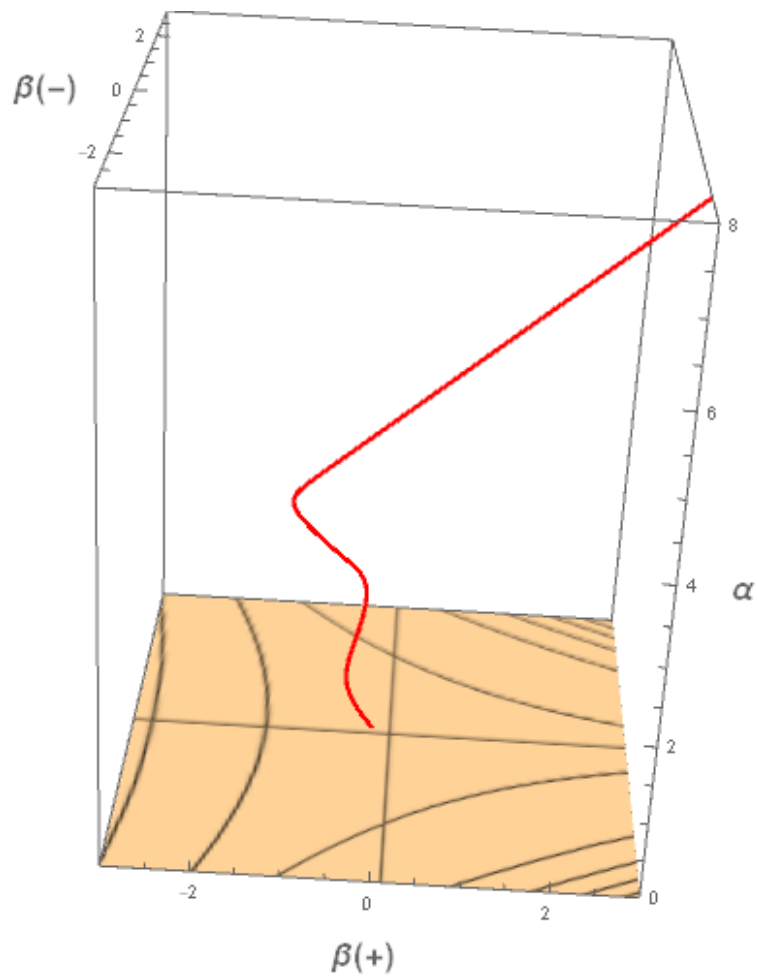


Figura 3.5: Trayectoria clásica de una partícula del modelo de Bianchi *IX*. En la imagen se muestran las reflexiones de la trayectoria clásica de una partícula sujeta al potencial  $V(\beta_+, \beta_-)$  en espacio  $(\beta_+, \beta_-, \alpha)$ . En la parte inferior de la figura se muestran las curvas de nivel de  $V(\beta_+, \beta_-)$ .



En las figuras (3.6), y (3.7) se muestra la evolución obtenida de los Hamiltonianos  $H_W$ , y  $H_V$  para diferentes condiciones iniciales de  $(\beta_+, \beta_-)$ .

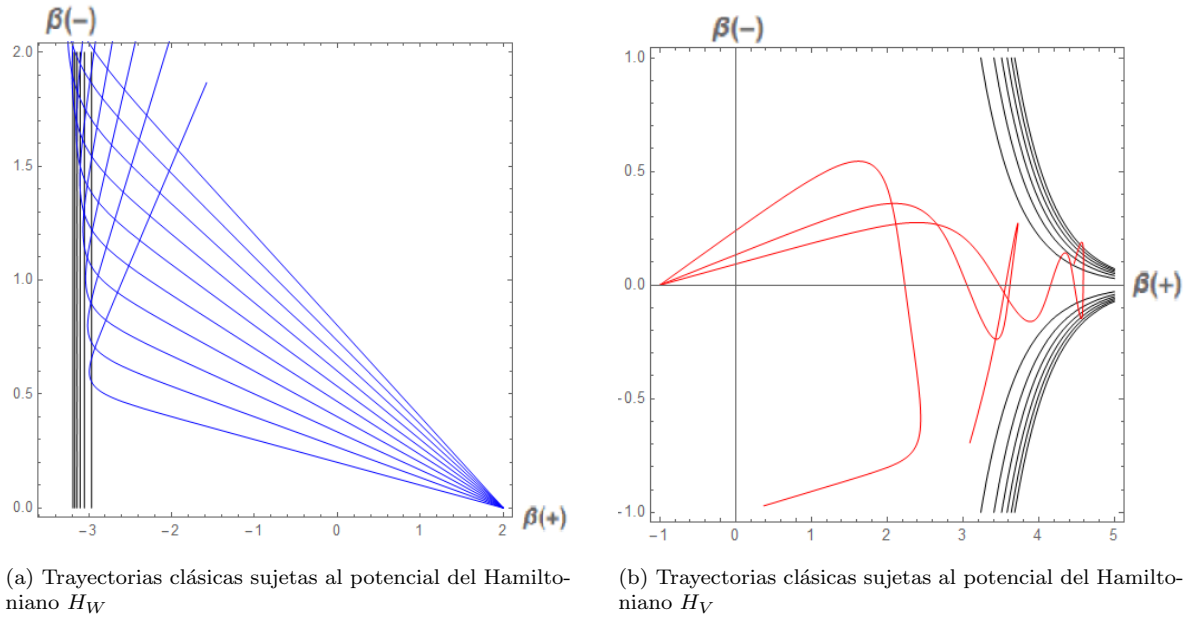


Figura 3.6: Trayectorias clásicas de una partícula en diferentes regiones del potencial  $V(\beta_+, \beta_-)$ .

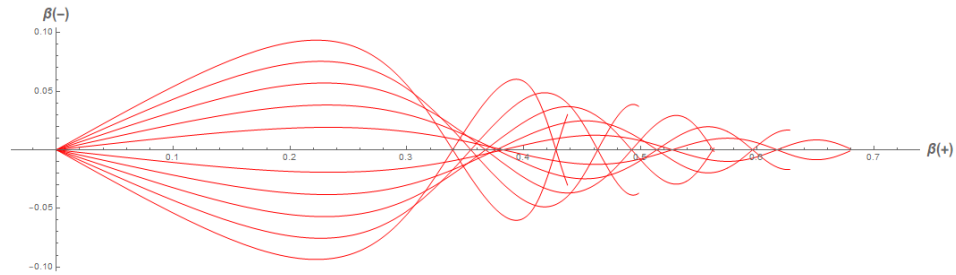


Figura 3.7: Trayectorias clásicas para en la región  $\beta_+ \rightarrow +\infty$ , y  $|\beta_- \ll 1|$  del potencial  $V(\beta_+, \beta_-)$ .

### 3.3. Análisis efectivo del modelo Mixmaster cuántico

#### 3.3.1. Desarrollo efectivo de momentos de $H_{IX}$

Por simplicidad, y para facilitar la aplicación numérica del método de momentos, se reescriben nuevamente  $\beta_{\pm} \rightarrow (x, y)$ , y  $p_{\pm} \rightarrow (p_x, p_y)$ . El Hamiltoniano de la ec. (3.2.35) es entonces

$$H_{IX} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + \frac{3(4\pi)^2}{k^2} e^{4\alpha} V(x, y)}, \quad (3.3.1)$$

donde el potencial  $V(x, y)$  es

$$V(x, y) = e^{-8x} - 4e^{-2x} \cosh(2\sqrt{3}y) + 2e^{4x} \left[ \cosh(4\sqrt{3}y) - 1 \right]. \quad (3.3.2)$$

Utilizando la definición del Hamiltoniano (3.3.1) y truncando a segundo orden se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} H_{QIX} &= H_{IX} + (H_{IX}^{-1} - p_x^2 H_{IX}^{-3}) G^{0200} + (H_{IX}^{-1} - p_y^2 H_{IX}^{-3}) G^{0002} \\ &+ \eta(\alpha) \left[ 2 \frac{\partial}{\partial x} (g_1(x, y) H_{IX}^{-1}) G^{2000} + 2\sqrt{3} \frac{\partial}{\partial y} (g_2(x, y) H_{IX}^{-1}) G^{0020} \right. \\ &\left. - \frac{4p_x}{H_{IX}^3} g_1(x, y) G^{1100} - \frac{4\sqrt{3}p_y}{H_{IX}^3} g_2(x, y) G^{0011} \right] \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

donde las funciones  $g_1(x, y)$ ,  $g_2(x, y)$ , y  $\eta(\alpha)$  son

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= -e^{-8x} + e^{-2x} \cosh(2\sqrt{3}y) + e^{4x} \left( \cosh(4\sqrt{3}y) - 1 \right) \\ g_2(x, y) &= -e^{-2x} \sinh(2\sqrt{3}y) + e^{4x} \sinh(4\sqrt{3}y), \\ \eta(\alpha) &= \frac{3(4\pi)^2}{k^2} e^{4\alpha}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

El primer y tercer índice de las potencias de  $G^{abcd}$  corresponden a las coordenadas  $x, y$ , respectivamente, mientras que el segundo y el cuarto a las coordenadas de los

momentos  $p_x, p_y$ . Las ecuaciones de movimiento para las variables clásicas son

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{p_x}{H_{IX}} - 2p_x\eta(\alpha)\frac{\partial}{\partial x}(g_1(x,y)H_{IX}^{-3})G^{2000} - 4\eta(\alpha)g_1(x,y)\frac{\partial}{\partial p_x}(p_xH_{IX}^{-3})G^{1100} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_x}(H_{IX}^{-1} - p_x^2H_{IX}^{-3})G^{0200} + 2\sqrt{3}\eta(\alpha)\frac{\partial^2}{\partial p_x\partial y}(g_2(x,y)H_{IX}^{-1})G^{0020} \\
&- 4\sqrt{3}p_y\eta(\alpha)\frac{\partial}{\partial p_x}(H_{IX}^{-3})g_2(x,y)G^{0011} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_x}(H_{IX}^{-1} - p_y^2H_{IX}^{-3})G^{0002}, \\
\dot{y} &= \frac{p_y}{H_{IX}} + 2\eta(\alpha)\frac{\partial^2}{\partial x\partial p_y}(g_1(x,y)H_{IX}^{-1})G^{2000} - 4p_x\eta(\alpha)\frac{\partial}{\partial p_y}(g_1(x,y)H_{IX}^{-3})G^{1100} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_y}(H_{IX}^{-1} - p_x^2H_{IX}^{-3})G^{0200} + 2\sqrt{3}\eta(\alpha)\frac{\partial^2}{\partial p_x\partial y}(g_2(x,y)H_{IX}^{-1})G^{0020} \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}(H_{IX}^{-1} - p_y^2H_{IX}^{-3})G^{0011} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_y}(H_{IX}^{-1} - p_y^2H_{IX}^{-3})G^{0002}, \\
\dot{p}_x &= -4\eta(\alpha)g_1(x,y)H_{IX}^{-1} - 2\eta(\alpha)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(g_1(x,y)H_{IX}^{-1})G^{2000} - 4\eta(\alpha)\frac{\partial^2}{\partial x\partial p_x}(g_1(x,y)H_{IX}^{-1})G^{1100} \\
&- \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(H_{IX}^{-1} - p_x^2H_{IX}^{-3})G^{0200} - 2\sqrt{3}\eta(\alpha)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(g_2(x,y)H_{IX}^{-1})G^{0020} \\
&+ 4\sqrt{3}p_y\eta(\alpha)\frac{\partial}{\partial x}(g_2(x,y)H_{IX}^{-3})G^{0011} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(H_{IX}^{-1} - p_y^2H_{IX}^{-3})G^{0002}, \\
\dot{p}_y &= -4\sqrt{3}\eta(\alpha)g_2(x,y)H_{IX}^{-1} - 2\eta(\alpha)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(g_1(x,y)H_{IX}^{-1})G^{2000} + 4p_x\eta(\alpha)\frac{\partial}{\partial y}(g_1(x,y)H_{IX}^{-3})G^{1100} \\
&- \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(H_{IX}^{-1} - p_x^2H_{IX}^{-3})G^{0200} - 2\sqrt{3}\eta(\alpha)\frac{\partial^3}{\partial y^3}(g_2(x,y)H_{IX}^{-1})G^{0020} \\
&- 4\sqrt{3}\eta(\alpha)\frac{\partial^2}{\partial y\partial p_y}(g_2(x,y)H_{IX}^{-1})G^{0011} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(H_{IX}^{-1} - p_y^2H_{IX}^{-3})G^{0002}, \tag{3.3.5}
\end{aligned}$$

y para los momentos

$$\begin{aligned}
\dot{G}^{2000} &= \frac{8p_x}{H_{IX}^3}\eta(\alpha)g_1(x,y)G^{2000} - 2(H_{IX}^{-1} - p_x^2H_{IX}^{-3})G^{1100} \\
\dot{G}^{1100} &= 4\eta(\alpha)\frac{\partial}{\partial x}(g_1(x,y)H_{IX}^{-1})G^{2000} - (H_{IX}^{-1} - p_x^2H_{IX}^{-3})G^{0200} \\
\dot{G}^{0200} &= 8\eta(\alpha)\frac{\partial}{\partial x}(g_1(x,y)H_{IX}^{-1})G^{1100} - \frac{8p_x}{H_{IX}^3}\eta(\alpha)g_1(x,y)G^{0200} \\
\dot{G}^{0020} &= \frac{8\sqrt{3}p_y}{H_{IX}^3}\eta(\alpha)g_2(x,y)G^{0020} - 2(H_{IX}^{-1} - p_y^2H_{IX}^{-3})G^{0011} \\
\dot{G}^{0011} &= 4\sqrt{3}\eta(\alpha)\frac{\partial}{\partial y}(g_2(x,y)H_{IX}^{-1})G^{0020} - (H_{IX}^{-1} - p_y^2H_{IX}^{-3})G^{0002} \\
\dot{G}^{0002} &= 8\sqrt{3}\eta(\alpha)\frac{\partial}{\partial y}(g_2(x,y)H_{IX}^{-1})G^{0011} - \frac{8\sqrt{3}p_y}{H_{IX}^3}\eta(\alpha)g_2(x,y)G^{0002}. \tag{3.3.6}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones del sistema anterior están acopladas y son altamente no lineales, por lo que, es necesario implementar una solución numérica para obtener la evolución de las trayectorias efectivas. Utilizando el pulso Gaussiano de (2.3.7) se determinan las condiciones iniciales para los momentos  $G^{abcd}$ . Para un truncamiento a segundo orden se tiene que

$$G^{2000} = G^{0020} = \frac{\hbar^2}{2\sigma^2}, \quad G^{1100} = G^{0011} = 0, \quad G^{0200} = G^{0002} = \frac{\sigma^2}{2}. \quad (3.3.7)$$

La evolución de las trayectorias efectivas obtenidas al solucionar el sistema de ecuaciones (3.3.5) y (3.3.6), utilizando las condiciones iniciales (3.3.7) se muestran en la figura (3.8). En ella se observa que, la retroacción de momentos cuánticos con las variables clásicas afecta directamente el comportamiento de las anisotropías  $x$  y  $y$  en el espacio  $(x, y)$ . La razón por la cual se reescribió el factor de escala de la ec. (3.2.12) en términos de las anisotropías es comparar el comportamiento clásico y el efectivo del factor de escala  $a(t)$ . En la figura (3.9) se muestra la incertidumbre de la posición  $x \pm \sqrt{G^{0200}}$  de la trayectoria efectiva de una partícula. En la figura (3.10) Se muestra el comportamiento efectivo del parámetro  $\alpha(t)$  con respecto al factor de escala  $a(t)$ . Finalmente en (3.11) se muestra la remoción de la singularidad inicial.

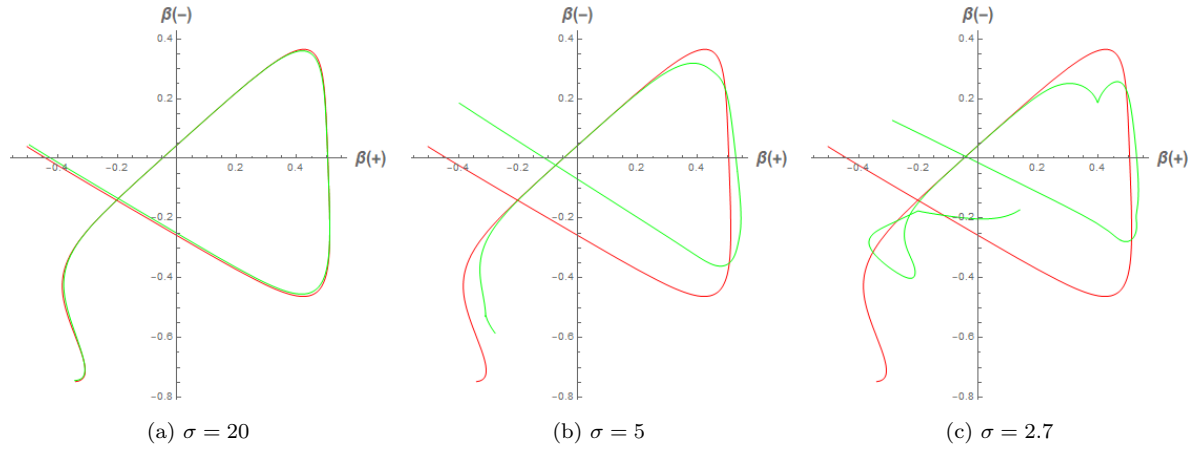


Figura 3.8: Comparación de trayectorias clásicas y efectivas en el espacio  $(\beta_+, \beta_-)$  para diferentes valores de  $\sigma$ .

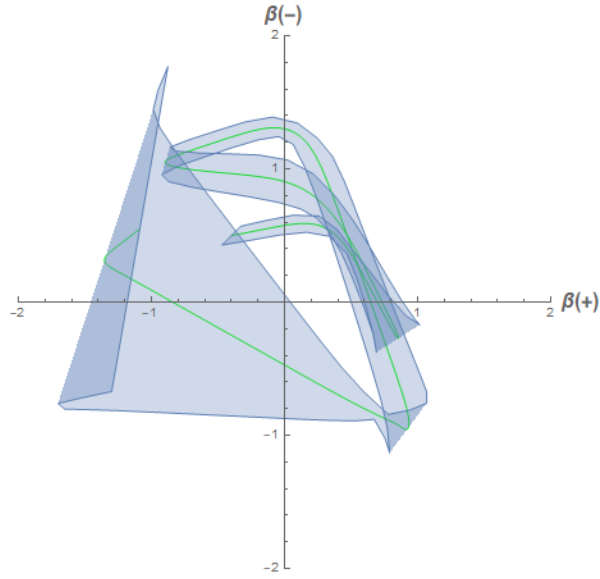


Figura 3.9: Evolución de la incertidumbre de una trayectoria efectiva del modelo de Bianchi  $IX$ . En color verde se muestra la trayectoria efectiva de una partícula que se mueve en el espacio de anisotropías  $(\beta_+, \beta_-)$ . La sombra azul corresponde a la evolución de la incertidumbre de la posición  $x \pm \sqrt{G^{0200}}$ .

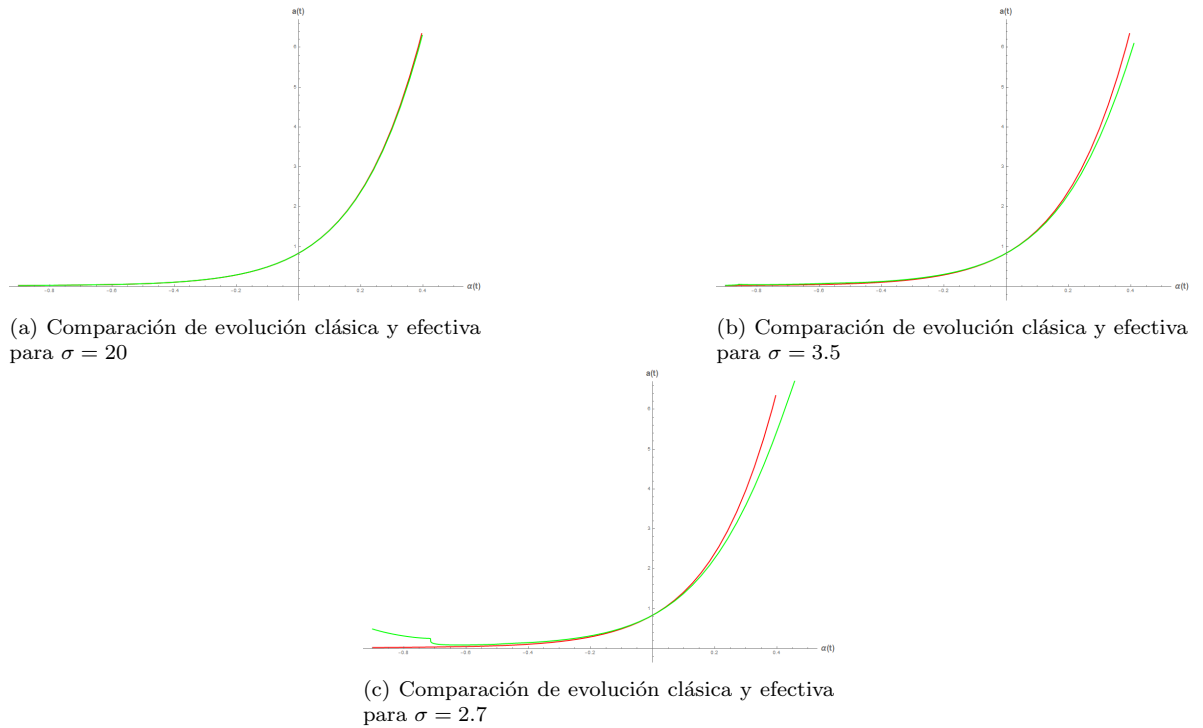
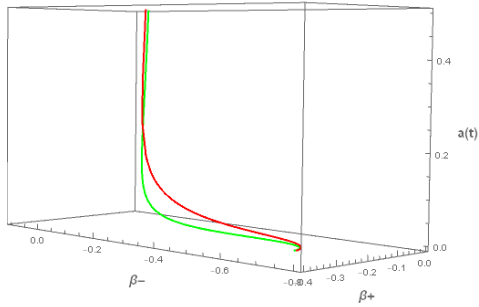
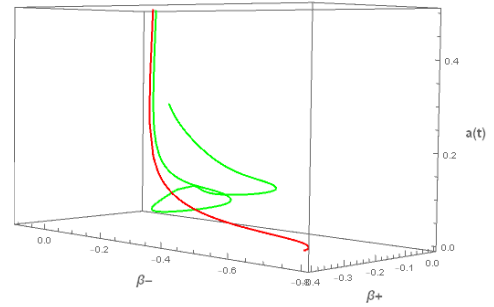


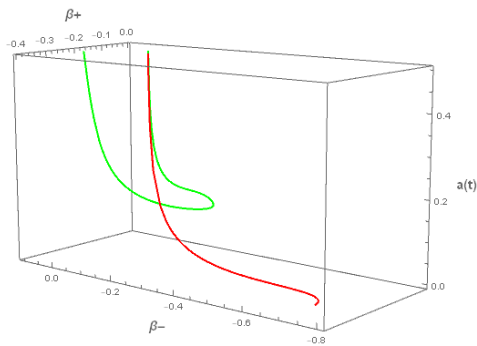
Figura 3.10: Comparación la trayectoria clásica (en rojo) y efectiva (en verde) del modelo de Bianchi  $IX$ . En la imagen se observa que cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ , el factor de escala  $a(t) \rightarrow 0$ . Además, se muestra la modificación de la trayectoria clásica debida a la retroacción de los momentos cuánticos para diferentes valores de la dispersión  $\sigma$ .



(a) Comparación de evolución clásica y efectiva para  $\sigma = 20$



(b) Comparación de evolución clásica y efectiva para  $\sigma = 3$



(c) Comparación de evolución clásica y efectiva para  $\sigma = 2.2$

Figura 3.11: Comparación de trayectorias clásicas (en rojo) y efectivas (en verde) del factor de escala  $a(t)$  para diferentes valores de  $\sigma$ . En la figura se muestra que la retroacción de los momentos permite remover la singularidad inicial cuando se consideran distintos valores de la dispersión  $\sigma$ .

### 3.3.2. Desarrollo efectivo de momentos de $H_V$

Reescribiendo el Hamiltoniano  $H_V$  de la ec. (3.2.39) en términos de las variables  $x, y$ , y sus momentos se tiene

$$H_V = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + 48 \frac{3(4\pi)^2}{k^2} y^2 e^{4\alpha} e^{4x}}. \quad (3.3.8)$$

Truncando nuevamente a segundo orden la ec. (2.3.5) para dos grados de libertad, y utilizando  $H_V$  se obtiene  $H_{QV}$

$$\begin{aligned} H_{QV} &= H_V + 4\zeta(\alpha)y^2e^{4x} \left( -\frac{1}{2}\zeta(\alpha)y^2e^{4x}H_V^{-3} + H_V^{-1} \right) G^{2000} - 2\zeta(\alpha)y^2e^{4x}H_V^{-1}p_xG^{1100} \\ &+ \frac{1}{2}(H_V^{-1} - H_V^{-3}p_x^2)G^{0200} + \frac{1}{2}\zeta(\alpha)e^{4x}(-\zeta(\alpha)y^2e^{4x}H_V^{-3} + H_V^{-1})G^{0020} \\ &- \zeta(\alpha)y^2e^{4x}H_V^{-1}p_yG^{0011} + \frac{1}{2}(H_V^{-1} - H_V^{-3}p_y^2)G^{0002} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

en donde  $\zeta(\alpha)$  es

$$\zeta(\alpha) = 48 \frac{3(4\pi)^2}{k^2} e^{4\alpha} \quad (3.3.10)$$

Las ecuaciones de movimiento para los pares de variables canónicas son

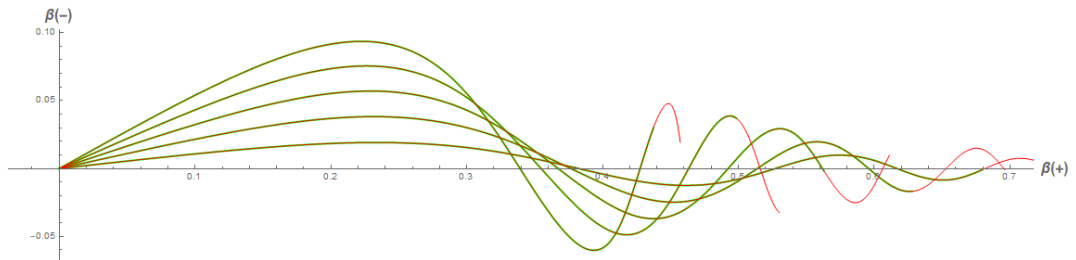
$$\begin{aligned}
\dot{x} &= H_V^{-1} p_x + 4\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} \frac{\partial}{\partial p_x} \left( -\frac{1}{2} \zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} + H_V^{-1} \right) G^{2000} - \frac{\partial}{\partial x} (H_V^{-1} - H_V^{-3} p_x^2) G^{1100} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_x} (H_V^{-1} - H_V^{-3} p_x^2) G^{0200} + \frac{1}{2} \zeta(\alpha) e^{4x} \frac{\partial}{\partial p_x} (-\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} + H_V^{-1}) G^{0020} \\
&- \zeta(\alpha) y e^{4x} p_y \frac{\partial}{\partial p_x} H_V^{-3} G^{0011} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_x} (H_V^{-1} - H_V^{-3} p_y^2) G^{0002} \\
\dot{y} &= H_V^{-1} p_y + 4\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} \frac{\partial}{\partial p_y} \left( -\frac{1}{2} \zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} + H_V^{-1} \right) G^{2000} - 2\zeta(\alpha) e^{4x} p_x \frac{\partial}{\partial y} (y^2 H_V^{-3}) G^{1100} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_y} (H_V^{-1} - H_V^{-3} p_x^2) G^{0200} + \frac{1}{2} \zeta(\alpha) e^{4x} \frac{\partial}{\partial p_y} (-\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} + H_V^{-1}) G^{0020} \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} (H_V^{-1} - H_V^{-3} p_y^2) G^{0011} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_y} (H_V^{-1} - H_V^{-3} p_y^2) G^{0002} \\
\dot{p}_x &= -2\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-1} - 4\zeta(\alpha) y^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ e^{4x} \left( -\frac{1}{2} \zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} + H_V^{-1} \right) \right] G^{2000} \\
&- 8\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} \frac{\partial}{\partial p_x} \left( -\frac{1}{2} \zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} + H_V^{-1} \right) G^{1100} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (H_V^{-1} - H_V^{-3} p_x^2) G^{0200} \\
&- \frac{1}{2} \zeta(\alpha) \frac{\partial}{\partial x} [e^{4x} (-\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} - H_V^{-1})] G^{0020} + \zeta(\alpha) y p_y \frac{\partial}{\partial x} (e^{4x} H_V^{-3}) G^{0011} \\
&- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (H_V^{-1} - H_V^{-3} p_y^2) G^{0002}, \\
\dot{p}_y &= -\zeta(\alpha) y e^{4x} H_V^{-1} - 4\zeta(\alpha) e^{4x} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^2 \left( -\frac{1}{2} \zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} + H_V^{-1} \right) \right] G^{2000} \\
&+ 2\zeta(\alpha) e^{4x} p_x \frac{\partial}{\partial y} (y^2 H_V^{-3}) G^{1100} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (H_V^{-1} - H_V^{-3} p_x^2) G^{0200} \\
&- \frac{1}{2} \zeta(\alpha) e^{4x} \frac{\partial}{\partial y} (-\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} + H_V^{-1}) G^{0020} - \zeta(\alpha) e^{4x} \frac{\partial}{\partial p_y} (-\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} + H_V^{-1}) G^{0011} \\
&- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (H_V^{-1} - H_V^{-3} p_y^2) G^{0002}, \tag{3.3.11}
\end{aligned}$$

y para los momentos

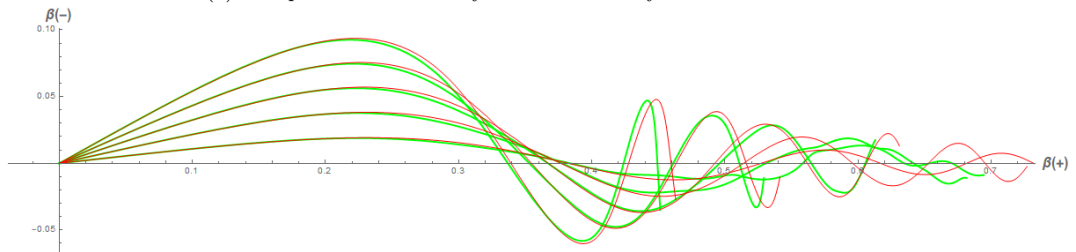
$$\begin{aligned}
\dot{G}^{2000} &= 4\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} p_x G^{2000} - 2 (H_V^{-1} - H_V^{-3} p_x^2) G^{1100}, \\
\dot{G}^{1100} &= 8\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} \left( -\frac{1}{2} \zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} + H_V^{-1} \right) G^{2000} - (H_V^{-1} - H_V^{-3} p_x^2) G^{0200}, \\
\dot{G}^{0200} &= 16\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} \left( -\frac{1}{2} \zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} + H_V^{-1} \right) G^{1100} - 4\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} p_x G^{0200}, \\
\dot{G}^{0020} &= 2\zeta(\alpha) y e^{4x} H_V^{-3} p_y G^{0020} - 2 (H_V^{-1} - H_V^{-3} p_y^2) G^{0011}, \\
\dot{G}^{0011} &= \zeta(\alpha) e^{4x} (-\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} + H_V^{-1}) G^{0020} - (H_V^{-1} - H_V^{-3} p_y^2) G^{0002}, \\
\dot{G}^{0002} &= 2\zeta(\alpha) e^{4x} (-\zeta(\alpha) y^2 e^{4x} H_V^{-3} + H_V^{-1}) G^{0011} - 2\zeta(\alpha) y e^{4x} H_V^{-3} p_y G^{0002}. \tag{3.3.12}
\end{aligned}$$

En la figura (3.14) se muestra la comparación clásica y efectiva de  $H_V$  y  $H_{QV}$ .

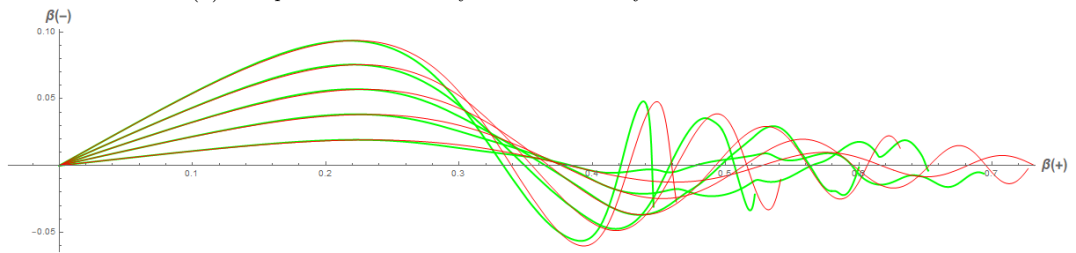




(a) Comparación de las trayectorias clásicas y semiclásicas con  $\sigma = 10$



(b) Comparación de las trayectorias clásicas y semiclásicas con  $\sigma = 15$



(c) Comparación de las trayectorias clásicas y semiclásicas con  $\sigma = 20$

Figura 3.12: Comparación de las trayectorias clásicas y efectivas de  $H_V$ , y  $H_{QV}$ .

## 3.4. Potencial efectivo del Mixmaster cuántico

### 3.4.1. Desarrollo de $H_V$ en series de Taylor

Debido a la complejidad del Hamiltoniano de la ec. (3.3.1), no es posible aplicar el potencial efectivo generalizado sin realizar antes una transformación canónica que permita reescribirlo en término cinético más potencial. Sin embargo, es más sencillo aplicarlo al Hamiltoniano de la ec. (3.3.8).

Desarrollando  $H_V$  a tercer orden para las variables  $x$  y  $y$  se tiene que

$$H'_V = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} H_V = p_x^2 + p_y^2 + 2304e^{4t} \pi^2 \left( \frac{1}{2} y^2 + xy^2 + x^2 y^2 + \frac{2}{3} x^3 y^2 \right), \quad (3.4.1)$$

donde  $H'_V$  es el Hamiltoniano  $H_V$  escalado por un factor constante  $\sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ , y cuyo término potencial es una función polinómica de  $x$  y  $y$ . Este Hamiltoniano posee la forma necesaria para el desarrollo del potencial efectivo. Las líneas de equipotencial para este nuevo Hamiltoniano se muestran en la figura (3.13).

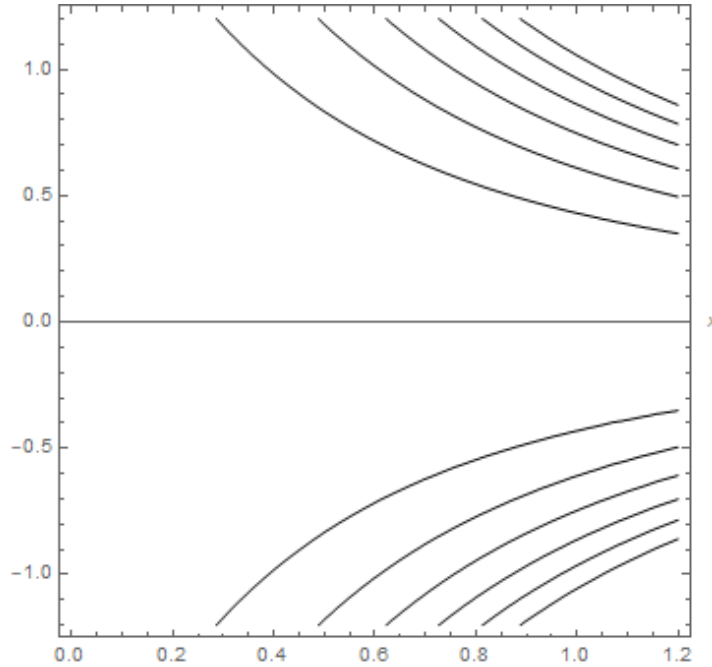
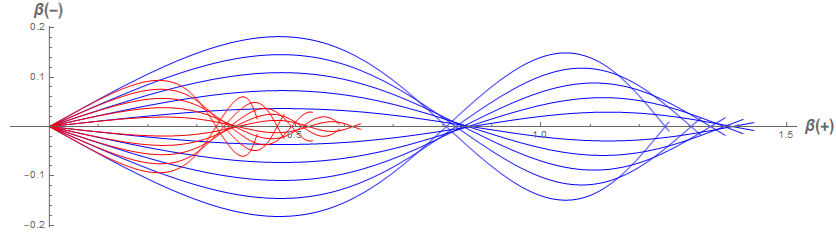


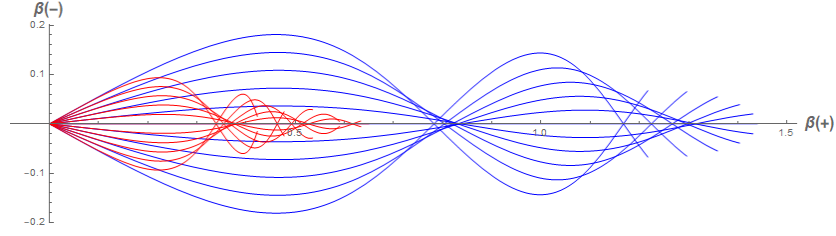
Figura 3.13: Líneas de equipotencial del Hamiltoniano  $H'_V$ .

En la figura (3.14) se muestra la comparación de la evolución obtenida a partir de  $H_V$  y  $H'_V$ .

Finalmente, en (3.15) se muestra la evolución de  $H'_V$  para diferentes condiciones iniciales.



(a) Segundo orden



(b) Tercer orden

Figura 3.14: Comparación de las trayectorias obtenidas de  $H_{ADM}$  y de su serie de Taylor a segundo y tercer orden en  $\beta_+$  y  $\beta_-$

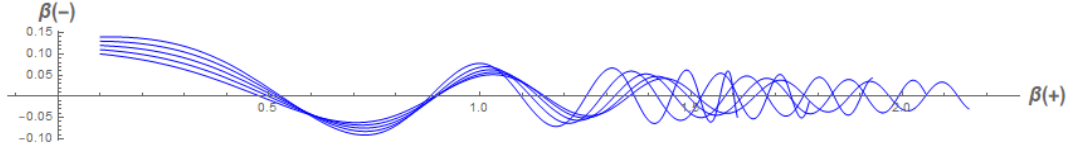


Figura 3.15: Trayectorias clásicas de  $H'_V$  para diferentes condiciones iniciales.

### 3.4.2. Potencial efectivo de $H'_V$

Sustituyendo  $H'_V$  en (2.3.10) se obtiene el potencial efectivo  $V^A$

$$V^A(x, y, s_1, s_2) = \frac{1}{8s_1^2} + \frac{1}{8s_2^2} + 288e^{4t}\pi^2 \left[ s_2^2 f_1(x, s_1) + \frac{4}{3}s_1 s_2 f_2(x, s_1)y + \frac{1}{3}f_3(x, s_1)y^2 \right], \quad (3.4.2)$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(x, s_1) &= 1 + 2(x + x^2) + \frac{4}{3}x^3 + 2s_1^2(1 + 2x), \\ f_2(x, s_1) &= 3 + 2s_1^2 + 6(x + x^2), \\ f_3(x, s_1) &= 3 + 6(x + x^2) + 4x^3 + 6s_1^2(1 + 2x). \end{aligned}$$

El Hamiltoniano efectivo para la región  $\beta_+ \rightarrow +\infty$ , y  $|\beta_- \ll 1|$  del potencial  $V(\beta_+, \beta_-)$  es

$$H_{IX}^A = p_x^2 + p_y^2 + p_{s_1}^2 + p_{s_2}^2 + V^A, \quad (3.4.3)$$

del que se obtiene el siguiente sistema dinámico

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_x &= -1152e^{4t}\pi^2 \left[ \left( \frac{1}{2} + x + x^2 + s_1^2 \right) (s_2^2 + y^2) + 2s_1s_2(1 + 2x)y \right], \\
 \dot{p}_y &= -192e^{4t}\pi^2 [2s_1s_2f_2(x, s_1) + f_3(x, s_1)], \\
 \dot{p}_{s_1} &= \frac{1}{4s_1^3} - 1152e^{4t}\pi^2 [s_1(1 + 2x)(s_2^2 + y^2) + s_2(1 + 2s_1^2 + 2x + 2x^2)y], \\
 \dot{p}_{s_2} &= \frac{1}{4s_2^3} - 576e^{4t}\pi^2 \left[ s_2f_1(x, s_1) + \frac{2}{3}s_1f_2(x, s_1)y \right], \\
 \dot{x} &= 2p_x, \\
 \dot{y} &= 2p_y, \\
 \dot{s}_1 &= 2p_{s_1}, \\
 \dot{s}_2 &= 2p_{s_2}.
 \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

La evolución del sistema de ecuaciones (3.4.4) se muestra en la figura (3.16).

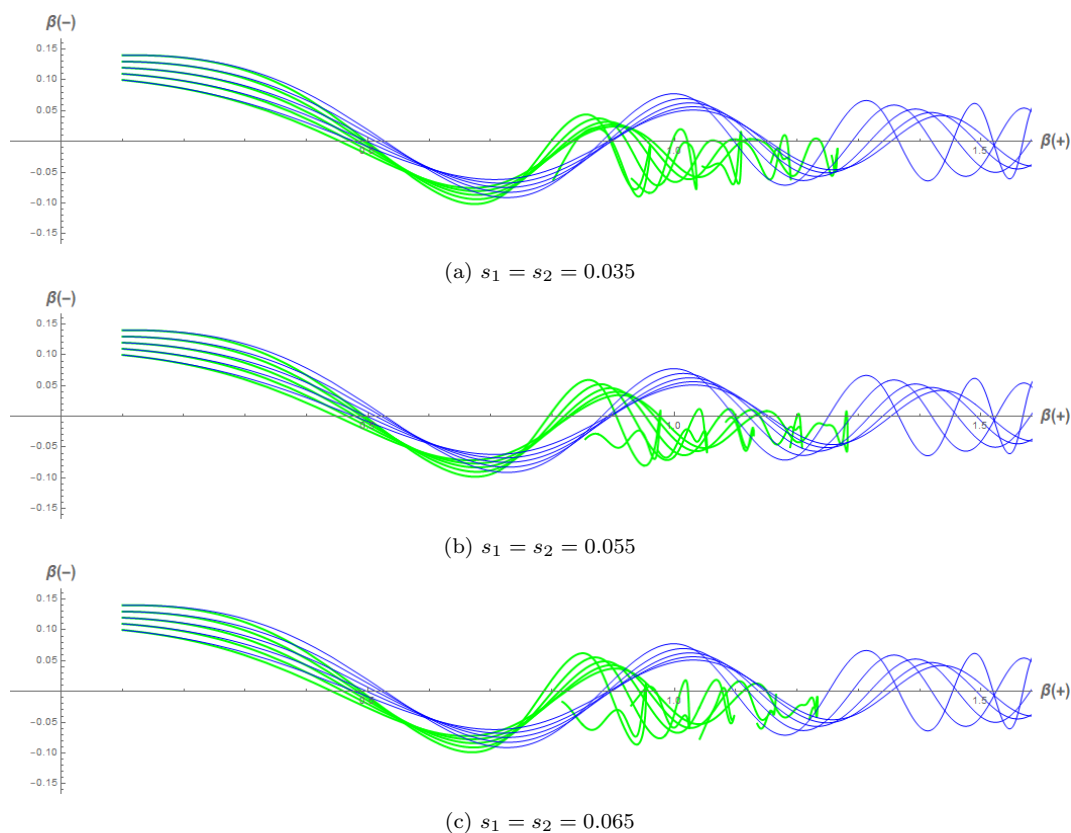


Figura 3.16: Las trayectorias verdes corresponden a la evolución del sistema utilizando el potencial a todo orden con las variables cuánticas cercanas a  $s_1 = s_2 = 0.065$ , mientras que, las azules son las trayectorias clásicas.

### 3.5. Discusión del capítulo 3

En este capítulo se trabajó de manera efectiva el modelo cuántico cosmológico de Bianchi IX a través del modelo Mixmaster, el cual puede ser interpretado como una generalización de un universo homogéneo e isotrópico debido a que incluye anisotropías. El Hamiltoniano clásico de la teoría del Mixmaster contiene la física de todos los modelos de Bianchi; la forma del potencial es quien determina el tipo de anisotropías. Particularmente para el potencial del Bianchi IX, se desarrolló un Hamiltoniano semiclásico efectivo a segundo orden a través del cual se obtuvo un conjunto de ecuaciones dinámicas que contienen la información clásica y parcialmente la información cuántica del sistema, y cuya solución permite recobrar la noción clásica de trayectorias de partículas, que no existen en la mecánica cuántica usual, en particular, trayectorias efectivas del factor de escala  $a(t)$ , y de las anisotropías del espacio. La modificación de las trayectorias clásicas se debe a la retroacción de los momentos cuánticos con la posición semiclásica del sistema.

En particular, la evolución del factor de escala muestra un comportamiento similar al de la cosmología FLRW del capítulo anterior, en el sentido que en ambos modelos es posible la remoción de la singularidad inicial cuando se varía el parámetro de dispersión  $\sigma$  de la ec. (2.3.7). Sin embargo, la evolución de  $a(t)$  para el modelo Mixmaster provee información adicional que no es posible observar en las graficas del modelo isotrópico. Por ejemplo, la solución del sistema de ecuaciones para tiempos negativos muestra un comportamiento similar al obtenido por metodologías de cuantización de lazos [72, 88, 89, 90, 91]. Por otra parte, debido a la naturaleza del modelo la retroacción de los momentos no afecta solamente la evolución de  $a(t)$  sino también a las anisotropías. Estas últimas muestran un comportamiento similar a las del sistema clásico. Una evolución tridimensional en el espacio  $(a(t), \beta_+, \beta_-)$  permite observar que, medida que el radio del universo tiende a cero, las anisotropías  $\beta_+$ , y  $\beta_-$  oscilan teniendo como consecuencia una expansión y contracción del espacio en cada una de las direcciones espaciales.

# Capítulo 4

## Conclusión y discusión

En esta tesis se trabajó con una teoría efectiva que permite obtener una aproximación de sistemas cuánticos complejos para los cuales es imposible resolver la ecuación de Schrödinger, y que, además, permite recobrar la noción de trayectorias clásicas que no se tiene en la mecánica cuántica usual. La dinámica se obtiene a partir de un Hamiltoniano efectivo representado por la ampliación del Hamiltoniano clásico por medio de valores esperados de dispersiones y momentos cuánticos a todos órdenes. De manera general, las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de este Hamiltoniano conforman un sistema dinámico con un número infinito de grados de libertad que usualmente son no lineales y acopladas. Por ello es necesario recurrir a métodos numéricos para obtener la evolución del sistema.

En el capítulo 1 se introdujeron brevemente los conceptos y definiciones básicas de la mecánica clásica, relatividad, y cosmología. El propósito principal de esto es proporcionar las herramientas matemáticas para una mejor comprensión de la aplicación del método efectivo, así como condensar la obtención de las ecuaciones de Hamilton para sistemas clásicos, y las ecuaciones de Einstein y de Friedman para el estudio de modelos cosmológicos clásicos.

En el capítulo 2 se introdujo brevemente el formalismo efectivo de momentos, y una generalización del mismo que involucra un potencial efectivo que tiene la particularidad de incluir todos los órdenes de las variables cuánticas en un nuevo par de variables canónicas, es decir, no requiere truncamientos. Se ejemplificó su aplicación en tres sistemas cuánticos conocidos, el oscilador armónico, el péndulo cuántico, y el modelo *FLRW* de la cosmología. En particular, se determinaron trayectorias efectivas de partículas que modifican el comportamiento clásico debido a la interacción del sistema con los momentos cuánticos, a excepción del oscilador armónico en donde las variables clásicas y cuánticas se desacoplan. Los resultados efectivos obtenidos para el péndulo cuántico y el modelo *FLRW* muestran un comportamiento interesante que los diferencia del sistema clásico. Por ejemplo, para el modelo *FLRW* se encontró que es posible la remoción de la singularidad inicial cuando se varía el parámetro  $\sigma$  de dispersión de la función de onda del sistema de la ecuación (2.3.7).

Finalmente, en el capítulo 3 se trabajó con el modelo de Bianchi *IX*, que es una generalización del modelo *FLRW* al incluir grados de libertad anisotrópicos, y se encontró

una relación directa entre el factor de escala del universo y las anisotropías espaciales. Solamente los modelos de Bianchi tipo  $I$ ,  $V$ , y  $IX$  se reducen a la cosmología FLRW bajo ciertas condiciones, particularmente, el modelo tipo  $IX$  contiene al sistema homogéneo isotrópico con curvatura positiva como caso especial. Aquellos modelos que no se reducen a las cosmologías FLRW terminan siendo altamente anisotrópicos a gran escala, de ahí la importancia de estudiar el modelo de Bianchi  $IX$ . Por otra parte, el modelo homogéneo anisotrópico mas general se conoce como el modelo Mixmaster. Este permite la reformulación de las ecuaciones de Einstein en un formalismo Hamiltoniano a través de la formulación ADM. La forma del término potencial en el Hamiltoniano del modelo Mixmaster determina el tipo de cosmología anisotrópica. En particular, se obtuvo la evolución de los valores esperados de las anisotropías del modelo Mixmaster correspondiente a un universo tipo Bianchi  $IX$ , lo cual permitió obtener la evolución efectiva del factor de escala. Los resultados muestran un comportamiento similar a los obtenidos por la metodología de cuantización de lazos de [72, 88, 89, 90, 91] en donde se demuestra que es posible la remoción de la singularidad inicial. Debido a la complejidad del modelo Mixmaster, no fue posible la aplicación del potencial efectivo generalizado por lo que fue necesario trabajar una versión reducida para obtener la evolución, la cual consiste en considerar una región particular del potencial completo y desarrollar el Hamiltoniano en serie de potencias. Esto permitió generar un nuevo Hamiltoniano en donde el término potencial es una función polinómica de las anisotropías. Sin embargo, esta versión reducida no contiene la información física completa del sistema y se utilizó únicamente para ejemplificar la aplicación del potencial a todo orden.

El método efectivo de momentos permite realizar una comparación directa entre la evolución efectiva y la del sistema clásico. Las trayectorias efectivas representan la evolución de los valores esperados de los operadores de posición y de momento, los cuales se pueden interpretar como la evolución de la trayectoria de una partícula clásica debido al teorema de Ehrenfest. El carácter cuántico del sistema está codificado debido a la existencia de incertidumbres de las trayectorias.

Particularmente, la cuantización usual en cosmología implica promover las variables clásicas a operadores para generar posteriormente un operador Hamiltoniano y finalmente aplicarlo a la función de onda del sistema. Este procedimiento conduce a la ecuación de Wheeler-DeWitt (WDW), la cual es muy complicada de resolver. Las trayectorias obtenidas del método efectivo representan el valor esperado del radio del universo, lo cual es similar a resolver la ecuación de WDW para encontrar la función de onda, y posteriormente calcular el valor esperado del operador  $\hat{a}(t)$ .

El objetivo principal de esta tesis fue aprender una metodología de aproximación efectiva que permite trabajar sistemas cuánticos complejos que no pueden ser resueltos a través de la cuantización usual. En particular, se eligió el modelo Mixmaster debido a su importancia en la cosmología clásica, y a la complejidad de su forma Hamiltoniana. Como se ha visto anteriormente, trabajar sistemas cuánticos bajo este esquema de aproximación permite obtener la dinámica efectiva sin necesidad de utilizar herramientas matemáticas complejas, esto mediante el uso del álgebra de Poisson, lo cual genera las ecuaciones de movimiento de forma más directa. El hecho de que el método de momentos permita obtener una solución aproximada de un sistema insoluble, hace que este

formalismo efectivo sea una herramienta matemática poderosa para estudiar sistemas cuánticos complejos. Debido a que los resultados obtenidos en esta tesis son similares a los de otros trabajos de investigación, fue posible cumplir completa y satisfactoriamente el objetivo principal de la tesis.



# Apéndice A

## Mecánica cuántica

### A.0.1. La función de onda y el principio de incertidumbre de Heisenberg

En mecánica cuántica, la dinámica de un sistema físico se obtiene a través de una ecuación diferencial de segundo orden conocida como la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi, \quad (\text{A.0.1})$$

donde  $\psi$  es la función de onda que contiene la dinámica completa del sistema. Por si sola,  $\psi$  no tiene interpretación física, en cambio, su módulo al cuadrado  $|\psi(x, t)|^2$  representa una densidad de probabilidad que permite encontrar a una partícula en una región del espacio en un tiempo. Debido a esta naturaleza probabilística, las características de una partícula como lo son sus valores de su posición y de momento no poseen un valor específico, sino que están distribuidos en una región particular del espacio. Sin embargo, cuando se trata de medir una de estas propiedades, la función de onda colapsa y se define su posición [93]. A medida que pasa el tiempo, la función de onda evoluciona y se dispersa cambiando su distribución de probabilidad. La medida de esta dispersión definida por la desviación estándar del valor esperado de la partícula es  $\Delta \hat{x} = \hat{x} - \langle \hat{x} \rangle$  con la varianza  $\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle$  definida por

$$\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle \equiv \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2. \quad (\text{A.0.2})$$

En general, no es posible describir dos cantidades físicas simultáneamente, debido a que están restringidos al principio de incertidumbre de Heisenberg el cual establece una restricción para determinar con exactitud el valor de dos variables canónicas [47]

$$\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (\text{A.0.3})$$

### A.0.2. Matemáticas de la mecánica cuántica

En notación de Dirac, un ket  $|\alpha\rangle$  es un vector que contiene toda la información de un estado físico en un espacio vectorial complejo denominado espacio de Hilbert<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Los espacios de Hilbert se pueden consultar mas a detalle en la referencia [94].

A cada ket de este espacio le corresponde un vector dual denominado bra  $\langle\alpha|$ . La correspondencia entre ambos espacios vectoriales es

$$\begin{aligned} c|\alpha\rangle &\leftrightarrow c^*\langle\alpha| \\ c|\alpha\rangle + d|\beta\rangle &\leftrightarrow c^*\langle\alpha| + d^*\langle\beta| \end{aligned}$$

donde  $c, d$  son números complejos y  $c^*, d^*$  son el complejo conjugado [57]. Existen herramientas matemáticas representadas por matrices que actúan sobre los ket de estado  $|\alpha\rangle$  denominados operadores  $\hat{A}$ , estos transforman los ket del espacio vectorial a otro en el mismo espacio  $\hat{A}|\omega\rangle = |\nu\rangle$ , similarmente  $\langle\omega|\hat{A} = \langle\nu|$  [56]. Los operadores satisfacen las siguientes propiedades [58]

$$\begin{aligned} |\omega\rangle = \hat{A}|\nu\rangle &\leftrightarrow \langle\omega| = \langle\nu|\hat{A}^\dagger \\ \hat{A}(|\omega\rangle + |\nu\rangle) = \hat{A}|\omega\rangle + \hat{A}|\nu\rangle &\leftrightarrow (\langle\omega| + \langle\nu|)\hat{A}^\dagger = \langle\omega|\hat{A}^\dagger + \langle\nu|\hat{A}^\dagger \\ \hat{A}(a|\omega\rangle) = a\hat{A}|\omega\rangle &\leftrightarrow (\langle\omega|a^*)\hat{A}^\dagger = a^*\langle\omega|\hat{A}^\dagger \end{aligned}$$

donde la función  $\dagger$  es la traspuesta conjugada del operador  $\hat{A}$ . Un operador es Hermítico<sup>2</sup> si es igual a su traspuesta conjugada si

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A},$$

y anti-Hermítico si

$$\hat{A}^\dagger = -\hat{A},$$

Para cada operador  $\hat{A}$  existen eigen estados correspondientes a estados físicos  $|\alpha\rangle$  denotados por  $|a'\rangle, |a''\rangle, |a'''\rangle$ , tal que

$$\begin{aligned} \hat{A}|a'\rangle &= a'|a'\rangle, \\ \hat{A}|a''\rangle &= a''|a''\rangle, \\ \hat{A}|a'''\rangle &= a'''|a'''\rangle. \end{aligned}$$

donde  $a', a'', a'''$  son los eigenvalores del operador  $\hat{A}$ .

Dados 3 operadores  $\hat{A}, \hat{B}$ , y  $\hat{C}$  se definen las operaciones de conmutación entre ellos de la siguiente manera [59]

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A},$$

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C},$$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}.$$

---

<sup>2</sup>En mecánica cuántica, los observables como la posición, el momento y la energía, están representados por operadores Hermíticos.

En mecánica cuántica, los pares de variables canónicas de una partícula como la posición y el momento son promovidos a operadores en el espacio de Hilbert. Estos operadores que permiten hacer mediciones físicas de los estados se denominan observables. En general, estos pares satisfacen ciertas reglas de conmutación. Particularmente, para la posición y momento se tiene que [57]

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}\hat{I}. \quad (\text{A.0.4})$$

donde  $\hat{I}$  es el operador identidad.

La forma más general de la ec. (A.0.3) para dos operadores canónicamente conjugados  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  es [93]

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right)^2. \quad (\text{A.0.5})$$

En notación de Dirac, el valor esperado de un operador se define a través de la función de onda  $\psi$ , y es igual a  $\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ .

### A.0.3. Función de onda y dinámica en la mecánica cuántica

#### La función de onda en las bases de posición y momento

Dados dos estados arbitrarios  $\beta$  y  $\alpha$ , su producto interno  $\langle\beta|\alpha\rangle$  permite medir la superposición del estado  $|\alpha\rangle$  en el estado  $|\beta\rangle$ . El producto  $\langle\beta|\alpha\rangle$  es [57]

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \int dx' \psi_\beta^*(x')\psi_\alpha(x'),$$

donde  $\psi_\alpha(x') = \langle x'|\alpha\rangle$  es la función de onda en la base de posición, y  $\psi_\beta^*(x') = \langle\beta|x'\rangle$  es el complejo conjugado. En la base de momento, se tiene que  $\phi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ , con el complejo conjugado  $\phi_\alpha(p') = \langle\beta|p'\rangle$ . La probabilidad de encontrar un observable  $\hat{A}$  en un rango de  $-\infty$  a  $\infty$  se obtiene mediante el producto  $\langle\beta|\hat{A}|\alpha\rangle$

$$\begin{aligned} \langle\beta|\hat{A}(\hat{x})|\alpha\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi_\beta^*(x')\hat{A}(x')\psi_\alpha(x'), \\ \langle\beta|\hat{A}(\hat{p})|\alpha\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp' \phi_\beta^*(p')\hat{A}(p')\phi_\alpha(p'). \end{aligned}$$

Donde la primera integral corresponde a la probabilidad de encontrar un observable en la base de posición, y la segunda en la base de momento.

El cambio de base de momento a posición (y viceversa), se obtiene aplicando el operador de proyección  $\Lambda_{x'} = |x'\rangle\langle x'|$  sobre el ket de momento  $|p'\rangle$  de tal manera que  $\Lambda_{x'}|p'\rangle = |x'\rangle\langle x'|p'\rangle$ . El producto interno  $\langle x'|p'\rangle$  es la magnitud de la proyección en la base  $|x'\rangle$ , y está determinado por la siguiente ecuación

$$\langle x'|p'\rangle = N \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right). \quad (\text{A.0.6})$$

Donde  $N$  es una constante cuyo valor se determina desarrollando el bracket  $\langle x'|x''\rangle$  en la base de posición  $p'$

$$\langle x'|x''\rangle = \int dp' \langle x'|p'\rangle \langle x''|p'\rangle^*, \quad (\text{A.0.7})$$

sustituyendo la ecuación (A.0.6) en (A.0.7) se tiene

$$\langle x'|x''\rangle = \int dp' N^2 \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{-ip'x''}{\hbar}\right) = \int dp' N^2 \exp\left(\frac{ip'}{\hbar}(x' - x'')\right),$$

y dado que  $\langle x'|x''\rangle = \delta(x' - x'')$ , la ecuación anterior es simplemente [57]

$$\delta(x' - x'') = \int dp' N^2 \exp\left(\frac{ip'}{\hbar}(x' - x'')\right). \quad (\text{A.0.8})$$

La ecuación (A.0.8) es similar a la forma integral de la función Delta con  $\delta(x' - x'') = \delta(\nu)$  [95]

$$\delta(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(iu\nu) du. \quad (\text{A.0.9})$$

A través del cambio de variable  $u = p'/\hbar$ , la ecuación anterior adquiere la forma

$$\delta(\nu) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \exp\left(\frac{ip'}{\hbar}\nu\right) dp'. \quad (\text{A.0.10})$$

Comparando las expresiones de la ec. (A.0.10) y (A.0.8) se tiene que  $N = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$ . Por lo que, la ec. (A.0.6) es

$$\langle x'|p'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right). \quad (\text{A.0.11})$$

La ecuación anterior representa una función de onda plana del eigen estado de momento  $|p'\rangle$ . Utilizando la ec. (A.0.11) se obtiene una relación para las funciones de onda  $\psi_\alpha(x')$  y  $\phi_\alpha(p')$

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x') &= \langle x'|\alpha\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\right] \int dp' \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right) \phi_\alpha(p'), \\ \phi_\alpha(p') &= \langle p'|\alpha\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\right] \int dx' \exp\left(\frac{-ip'x'}{\hbar}\right) \psi_\alpha(x'). \end{aligned}$$

Este par de ecuaciones muestra una relación simétrica entre las funciones de onda en las bases de posición y de momento, y corresponden a una transformación de Fourier [57].

## Dinámica en la mecánica cuántica: Representación de Schrödinger y representación de Heisenberg

En la representación de Schrödinger, la evolución de un estado arbitrario  $|\alpha\rangle$  a través del tiempo está determinada por el operador de evolución temporal  $\mathcal{U}(t, t_0)$ . Dados dos estados  $|\alpha, t_0\rangle$  y  $|\alpha, t\rangle$  a diferentes tiempos, se tiene que [57]

$$|\alpha, t_0; t\rangle = \mathcal{U}(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle. \quad (\text{A.0.12})$$

En notación de Dirac, la ecuación de Schrödinger para el operador de evolución temporal es

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(t, t_0) = \hat{H} \mathcal{U}(t, t_0), \quad (\text{A.0.13})$$

resolviendo la ecuación diferencial para  $\mathcal{U}(t, t_0)$  se tiene

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \exp\left(-\left(\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t dt' H(t')\right). \quad (\text{A.0.14})$$

Multiplicando la ec. (A.0.13) por  $|\alpha, t_0\rangle$  por la derecha se obtiene

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0; t\rangle = \hat{H} |\alpha, t_0; t\rangle. \quad (\text{A.0.15})$$

La evolución de la función de onda  $\psi(x', t) = \langle x' | \alpha, t_0; t \rangle$  a través del tiempo se obtiene multiplicando  $\langle x' |$  por la izquierda de la ec. (A.0.15)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x' | \alpha, t_0; t \rangle = \langle x' | \hat{H} | \alpha, t_0; t \rangle. \quad (\text{A.0.16})$$

Utilizando el operador Hamiltoniano  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})^3$ , la ec. (A.0.16) es

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x' | \alpha, t_0; t \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \langle x' | \alpha, t_0; t \rangle + V(x') \langle x' | \alpha, t_0; t \rangle,$$

esta ecuación muestra la evolución de estados arbitrarios  $|\alpha\rangle$  en el tiempo.

En la representación de Heisenberg, el operador de evolución temporal no cambia un estado arbitrario  $|\alpha\rangle$ , es decir,

$$\begin{aligned} U|\alpha\rangle &= |\alpha\rangle, \\ \langle\beta|U^\dagger &= \langle\beta|, \end{aligned}$$

El producto interno  $\langle\beta|\alpha\rangle$  es entonces

$$\langle\beta|\hat{A}|\alpha\rangle = ((\langle\beta|U^\dagger)\hat{A}(U|\alpha\rangle)) = \langle\beta|(U^\dagger\hat{A}U)|\alpha\rangle,$$

---

<sup>3</sup>El potencial  $V(\hat{x})$  es un operador Hermítico con eigenvalores  $V(\hat{x})|x'\rangle = V(x')|x'\rangle$

en esta ecuación se observa que, a diferencia de la representación de Schrödinger, son los observables los que evolucionan en el tiempo. La relación entre un operador en la representación de Schrödinger  $\hat{A}^{(S)}(t)$ , y de Heisenberg  $\hat{A}^{(H)}(t)$  es

$$\hat{A}^{(H)}(t) = U^\dagger(t)\hat{A}^{(S)}U(t). \quad (\text{A.0.17})$$

Asumiendo que el operador  $A^S$  no depende explícitamente del tiempo, tomando la derivada temporal de la ecuación anterior, y utilizando la ec. (A.0.13) se obtiene la ecuación que determina la dinámica de los operadores

$$\frac{d}{dt}A^{(H)} = \frac{1}{i\hbar} [A^{(H)}, H]. \quad (\text{A.0.18})$$

La ecuación anterior se conoce como la ecuación de movimiento de Heisenberg y es un análogo cuántico de las ecuaciones de movimiento clásicas [57].

## A.1. El oscilador armónico cuántico

En mecánica cuántica usual, el Hamiltoniano de un sistema se obtiene al promover las variables clásicas de posición y momento a operadores que actúan sobre estados cuánticos en el espacio de Hilbert. El Hamiltoniano del oscilador armónico cuántico es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \quad (\text{A.1.1})$$

donde  $m$  es la masa, y  $\omega$  es la frecuencia angular. Los operadores de posición  $\hat{x}$  y momento  $\hat{p}$  se pueden escribir en términos de  $a^\dagger$ , y  $a$

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right), \\ \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right), \end{aligned}$$

donde  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$  son operadores no Hermíticos definidos como operadores de creación y aniquilación respectivamente, estos generan los estados excitados del oscilador mediante la producción o destrucción de cuantos con energía igual a  $\hbar\omega$ . Además de  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$ , existe otro operador que permite contar la cantidad de partículas o cuantos de energía que se encuentran en un eigen estado arbitrario  $|n\rangle$  denominado operador de número  $\hat{N} = a^\dagger a$  [96], y cuyos eigenvalores son  $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ . Resolviendo el par de ecuaciones anterior para  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$ , y sustituyendo en (A.1.1) se llega a

$$\hat{H} = \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega,$$

o en términos de  $N$

$$\hat{H} = \left( N + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega.$$

Aplicando este operador a un eigen estado arbitrario  $|n\rangle$  se tiene que

$$\hat{H}|n\rangle = \left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega|n\rangle,$$

los eigenvalores de energía del oscilador armónico cuántico son  $E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$ , y que incluso en el estado más fundamental con  $n = 0$  la energía no puede ser cero. Similarmente, para  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$  se tiene que

$$\begin{aligned} a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \\ a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle. \end{aligned}$$

En el estado basal del oscilador armónico,  $\langle x|0\rangle$  corresponde a una función de onda Gaussiana y esta determinada por la siguiente relación

$$\psi_0(x) = \langle x|0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{x_0}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{x}}{x_0}\right)^2\right).$$

Este tipo de funciones de onda tienen la peculiaridad de saturar el principio de incertidumbre de Heisenberg [57]

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (\text{A.1.2})$$

En general, para el  $n$ -ésimo estado del oscilador se tiene que

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \langle x|\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{x}{l} - l\frac{d}{dx}\right)^n \psi_0(x). \quad (\text{A.1.3})$$

donde  $l = \sqrt{\hbar/m\omega}$  [96].

En la representación de Heisenberg, la evolución del valor esperado de  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  está determinada por las ecuaciones [57]

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t), \\ \hat{p}(t) &= -m\omega x_0 \sin(\omega t) + p_0 \cos(\omega t). \end{aligned}$$

En mecánica cuántica, la superposición de estados de energía también son solución de la ecuación de Schrödinger. Los estados de la forma  $|\alpha\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$  se conocen como estados de Glauber o estados coherentes, estos reproducen la oscilación de las ecuaciones clásicas de movimiento para el valor esperado de los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  [57]. Los estados coherentes corresponden a funciones de onda que oscilan en un potencial cuadrático sin aumentar su dispersión a medida que transcurre el tiempo, y debido a que son representados por funciones de onda Gaussianas, estos siempre saturan el principio de incertidumbre [97].

# Apéndice B

## Corchetes de Poisson entre los momentos $G^{a,b}$ de segundo orden

### B.0.1. Cálculo de los corchetes de Poisson entre los momentos $G^{a,b}$ de segundo orden

Utilizando la definición de la ecuación (2.3.2) se calculan los momentos  $G^{a,b}$  de primer orden

$$\begin{aligned} G^{1,0} &= \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \rangle = \langle \hat{p} \rangle - \langle \langle \hat{p} \rangle \rangle = \langle \hat{p} \rangle - \langle \hat{p} \rangle = 0, \\ G^{0,1} &= \langle (\hat{q} - \langle \hat{q} \rangle) \rangle = \langle \hat{q} \rangle - \langle \langle \hat{q} \rangle \rangle = \langle \hat{q} \rangle - \langle \hat{q} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.0.1})$$

De la misma manera se obtienen los momentos de segundo orden. Utilizando (2.3.2),  $G^{0,2}$  es

$$\begin{aligned} G^{0,2} &= \langle (\hat{q} - \langle \hat{q} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{q}^2 - 2\hat{q}\langle \hat{q} \rangle + \langle \hat{q} \rangle^2 \rangle = \langle \hat{q}^2 \rangle - \langle 2\hat{q}\langle \hat{q} \rangle \rangle + \langle \langle \hat{q} \rangle^2 \rangle \\ &= \langle \hat{q}^2 \rangle - 2\langle \hat{q} \rangle \langle \hat{q} \rangle + \langle \hat{q} \rangle^2 = \langle \hat{q}^2 \rangle - 2\langle \hat{q} \rangle^2 + \langle \hat{q} \rangle^2 = \langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2, \end{aligned} \quad (\text{B.0.2})$$

y para  $G^{2,0}$  se tiene

$$\begin{aligned} G^{2,0} &= \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 - 2\hat{p}\langle \hat{p} \rangle + \langle \hat{p} \rangle^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle 2\hat{p}\langle \hat{p} \rangle \rangle + \langle \langle \hat{p} \rangle^2 \rangle \\ &= \langle \hat{p}^2 \rangle - 2\langle \hat{p} \rangle \langle \hat{p} \rangle + \langle \hat{p} \rangle^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - 2\langle \hat{p} \rangle^2 + \langle \hat{p} \rangle^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2. \end{aligned} \quad (\text{B.0.3})$$

Finalmente para el momento  $G^{1,1}$

$$\begin{aligned} G^{1,1} &= \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)(\hat{q} - \langle \hat{q} \rangle) \rangle = \langle \hat{p}\hat{q} - \hat{p}\langle \hat{q} \rangle - \langle \hat{p} \rangle\hat{q} + \langle \hat{p} \rangle\langle \hat{q} \rangle \rangle \\ &= \langle \hat{p}\hat{q} \rangle - \langle \hat{p}\langle \hat{q} \rangle \rangle - \langle \langle \hat{p} \rangle\hat{q} \rangle + \langle \langle \hat{p} \rangle\langle \hat{q} \rangle \rangle = \langle \hat{p}\hat{q} \rangle - \langle \hat{q} \rangle \langle \hat{p} \rangle - \langle \hat{p} \rangle \langle \hat{q} \rangle + \langle \hat{p} \rangle \langle \hat{q} \rangle \\ &= \langle \hat{p}\hat{q} \rangle - 2\langle \hat{p} \rangle \langle \hat{q} \rangle + \langle \hat{p} \rangle \langle \hat{q} \rangle = \langle \hat{p}\hat{q} \rangle - \langle \hat{p} \rangle \langle \hat{q} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.0.4})$$

El valor de los momentos a primer y segundo orden se resumen en la tabla (B.1)

Una vez obtenidos los momentos en términos de los operadores  $\hat{q}$ , y  $\hat{p}$ , lo siguiente es calcular los brackets de Poisson entre ellos. El primer bracket de la ec. (2.3.14) es

$$\begin{aligned} \{G^{0,2}, G^{1,1}\} &= \{ \langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2, \langle \hat{p}\hat{q} \rangle - \langle \hat{p} \rangle \langle \hat{q} \rangle \} \\ &= \{ \langle \hat{q}^2 \rangle, \langle \hat{p}\hat{q} \rangle \} - \{ \langle \hat{q} \rangle^2, \langle \hat{p}\hat{q} \rangle \} - \{ \langle \hat{q}^2 \rangle, \langle \hat{p} \rangle \langle \hat{q} \rangle \} + \{ \langle \hat{q} \rangle^2, \langle \hat{p} \rangle \langle \hat{q} \rangle \} \\ &= \{ \langle \hat{q}^2 \rangle, \langle \hat{p}\hat{q} \rangle \} - 2\langle \hat{q} \rangle \{ \langle \hat{q} \rangle, \langle \hat{p}\hat{q} \rangle \} - \langle \hat{q} \rangle \{ \langle \hat{q}^2 \rangle, \langle \hat{p} \rangle \} + 2\langle \hat{q} \rangle^2 \{ \langle \hat{q} \rangle, \langle \hat{p} \rangle \}. \end{aligned}$$



Momentos $G^{a,b}$ a primer y segundo orden		
Orden	Momento	Valor
Primer	$G^{0,1}$	0
	$G^{1,0}$	0
Segundo	$G^{0,2}$	$\langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2$
	$G^{1,1}$	$\langle \hat{p}\hat{q} \rangle - \langle \hat{p} \rangle \langle \hat{q} \rangle$
	$G^{2,0}$	$\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2$

Tabla B.1: En la tabla se muestran los momentos  $G^{a,b}$  a primer y segundo orden obtenidos en las ecuaciones (B.0.1 -B.0.4).

Utilizando (2.3.1) se reescribe la ecuación anterior en términos del conmutador cuántico de los operadores  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$

$$\{G^{0,2}, G^{1,1}\} = \frac{1}{i\hbar} (\langle [\hat{q}^2, \hat{p}\hat{q}] \rangle - 2\langle \hat{q} \rangle \langle [\hat{q}, \hat{p}\hat{q}] \rangle - \langle \hat{q} \rangle \langle [\hat{q}^2, \hat{p}] \rangle + 2\langle \hat{q} \rangle^2 \langle [\hat{q}, \hat{p}] \rangle), \quad (\text{B.0.5})$$

en donde los conmutadores  $[\hat{q}^2, \hat{p}\hat{q}]$ ,  $[\hat{q}, \hat{p}\hat{q}]$ , y  $[\hat{q}^2, \hat{p}]$  son

$$\begin{aligned} [\hat{q}^2, \hat{p}\hat{q}] &= 2\hat{q}^2[\hat{q}, \hat{p}] = 2i\hbar\hat{q}^2, \\ [\hat{q}, \hat{p}\hat{q}] &= \hat{q}[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\hat{q}, \\ [\hat{q}^2, \hat{p}] &= 2\hat{q}[\hat{q}, \hat{p}] = 2i\hbar\hat{q}, \end{aligned} \quad (\text{B.0.6})$$

sustituyendo (B.0.6) en la ecuación (B.0.5) se tiene

$$\begin{aligned} \{G^{0,2}, G^{1,1}\} &= \frac{1}{i\hbar} (2i\hbar\langle \hat{q}^2 \rangle - 2i\hbar\langle \hat{q} \rangle^2 - 2i\hbar\langle \hat{q} \rangle^2 + 2i\hbar\langle \hat{q} \rangle^2) \\ &= 2(\langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2) = 2G^{0,2}. \end{aligned} \quad (\text{B.0.7})$$

Similarmente, el bracket de Poisson entre los momentos  $G^{1,1}$  y  $G^{2,0}$  es

$$\begin{aligned} \{G^{1,1}, G^{2,0}\} &= \{ \langle \hat{p}\hat{q} \rangle - \langle \hat{p} \rangle \langle \hat{q} \rangle, \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 \} \\ &= \{ \langle \hat{p}\hat{q} \rangle, \langle \hat{p}^2 \rangle \} - \{ \langle \hat{p} \rangle \langle \hat{q} \rangle, \langle \hat{p}^2 \rangle \} - \{ \langle \hat{p}\hat{q} \rangle, \langle \hat{p} \rangle^2 \} + \{ \langle \hat{p} \rangle \langle \hat{q} \rangle, \langle \hat{p} \rangle^2 \} \\ &= \{ \langle \hat{p}\hat{q} \rangle, \langle \hat{p}^2 \rangle \} - \langle \hat{p} \rangle \{ \langle \hat{q} \rangle, \langle \hat{p}^2 \rangle \} - 2\langle \hat{p} \rangle \{ \langle \hat{p}\hat{q} \rangle, \langle \hat{p} \rangle \} + 2\langle \hat{p} \rangle^2 \{ \langle \hat{q} \rangle, \langle \hat{p} \rangle \}. \end{aligned}$$

Utilizando nuevamente (2.3.1) para describir la ecuación anterior se tiene

$$\{G^{1,1}, G^{2,0}\} = \frac{1}{i\hbar} (\langle [\hat{p}\hat{q}, \hat{p}^2] \rangle - \langle \hat{p} \rangle \langle [\hat{q}, \hat{p}^2] \rangle - 2\langle \hat{p} \rangle \langle [\hat{p}\hat{q}, \hat{p}] \rangle + 2\langle \hat{p} \rangle^2 \langle [\hat{q}, \hat{p}] \rangle), \quad (\text{B.0.8})$$

en donde los conmutadores  $[\hat{p}\hat{q}, \hat{p}^2]$ ,  $[\hat{q}, \hat{p}^2]$ , y  $[\hat{p}\hat{q}, \hat{p}]$  son

$$\begin{aligned} [\hat{p}\hat{q}, \hat{p}^2] &= 2\hat{p}^2[\hat{q}, \hat{p}] = 2i\hbar\hat{p}^2, \\ [\hat{q}, \hat{p}^2] &= 2\hat{p}[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\hat{p}, \\ [\hat{p}\hat{q}, \hat{p}] &= \hat{p}[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\hat{p}, \end{aligned} \quad (\text{B.0.9})$$

sustituyendo (B.0.9) en la ecuación (B.0.8) se llega a

$$\begin{aligned}\{G^{1,1}, G^{2,0}\} &= \frac{1}{i\hbar}(2i\hbar\langle\hat{p}^2\rangle - 2i\hbar\langle\hat{p}\rangle^2 - 2i\hbar\langle\hat{p}\rangle^2 + 2i\hbar\langle\hat{p}\rangle^2) \\ &= 2(\langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2) = 2G^{2,0}.\end{aligned}\quad (\text{B.0.10})$$

Finalmente, el bracket de Poisson de los momentos  $G^{0,2}$ , y  $G^{2,0}$  es

$$\begin{aligned}\{G^{0,2}, G^{2,0}\} &= \{\langle\hat{q}^2\rangle - \langle\hat{q}\rangle^2, \langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2\} \\ &= \{\langle\hat{q}^2\rangle, \langle\hat{p}^2\rangle\} - \{\langle\hat{q}\rangle^2, \langle\hat{p}^2\rangle\} - \{\langle\hat{q}^2\rangle, \langle\hat{p}\rangle^2\} + \{\langle\hat{q}\rangle^2, \langle\hat{p}\rangle^2\} \\ &= \{\langle\hat{q}^2\rangle, \langle\hat{p}^2\rangle\} - 2\langle\hat{q}\rangle\{\langle\hat{q}\rangle, \langle\hat{p}^2\rangle\} - 2\langle\hat{p}\rangle\{\langle\hat{q}^2\rangle, \langle\hat{p}\rangle\} + 4\langle\hat{q}\rangle\langle\hat{p}\rangle\{\langle\hat{q}\rangle, \langle\hat{p}\rangle\}.\end{aligned}\quad (\text{B.0.11})$$

Utilizando (2.3.1) para describir (B.0.11) se tiene

$$\{G^{0,2}, G^{2,0}\} = \frac{1}{i\hbar}(\langle[\hat{q}^2, \hat{p}^2]\rangle - 2\langle\hat{q}\rangle\langle[\hat{q}, \hat{p}^2]\rangle - 2\langle\hat{p}\rangle\langle[\hat{q}^2, \hat{p}]\rangle + 4\langle\hat{q}\rangle\langle\hat{p}\rangle\langle[\hat{q}, \hat{p}]\rangle),$$

en donde los conmutadores  $[\hat{q}^2, \hat{p}^2]$ ,  $[\hat{q}, \hat{p}^2]$ , y  $[\hat{q}^2, \hat{p}]$  son

$$\begin{aligned}[\hat{q}^2, \hat{p}^2] &= 4\hat{q}\hat{p}[\hat{q}, \hat{p}] = 4i\hbar\hat{q}\hat{p}, \\ [\hat{q}, \hat{p}^2] &= 2\hat{p}[\hat{q}, \hat{p}] = 2i\hbar\hat{p}, \\ [\hat{q}^2, \hat{p}] &= 2\hat{q}[\hat{q}, \hat{p}] = 2i\hbar\hat{q},\end{aligned}\quad (\text{B.0.12})$$

sustituyendo (B.0.12) en la ecuación (B.0.11)

$$\begin{aligned}\{G^{0,2}, G^{2,0}\} &= \frac{1}{i\hbar}(4i\hbar\langle\hat{q}\hat{p}\rangle - 4i\hbar\langle\hat{q}\rangle\langle\hat{p}\rangle - 4i\hbar\langle\hat{q}\rangle\langle\hat{p}\rangle + 4i\hbar\langle\hat{q}\rangle\langle\hat{p}\rangle) \\ &= 4(\langle\hat{q}\hat{p}\rangle - \langle\hat{q}\rangle\langle\hat{p}\rangle) = 4G^{1,1}.\end{aligned}\quad (\text{B.0.13})$$

En la tabla (B.2) se muestra el resultado de los brackets de Poisson entre los momentos  $G^{a,b}$  de segundo orden.

Bracket de Poisson entre momentos $G^{a,b}$ de segundo orden	
$\{G^{0,2}, G^{1,1}\}$	$2G^{0,2}$
$\{G^{1,1}, G^{2,0}\}$	$2G^{2,0}$
$\{G^{0,2}, G^{2,0}\}$	$4G^{1,1}$

Tabla B.2: En la tabla se muestran los brackets de Poisson entre momentos  $G^{a,b}$  de segundo orden obtenidos en las ecuaciones (B.0.7, B.0.10, y B.0.13).

# Bibliografía

- [1] Yu L Dokshitzer, DI Dyakonov, and SI Troyan. Hard processes in quantum chromodynamics. *Physics Reports*, 58(5):269–395, 1980.
- [2] Feliks Nuske, Bettina G Keller, Guillermo Pérez-Hernández, Antonia SJS Mey, and Frank Noé. Variational approach to molecular kinetics. *Journal of chemical theory and computation*, 10(4):1739–1752, 2014.
- [3] Maria Esteban, Mathieu Lewin, and Eric Séré. Variational methods in relativistic quantum mechanics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 45(4):535–593, 2008.
- [4] Ekwevugbe Omugbe, Omosede E Osafire, and Michael C Onyeaju. Mass spectrum of mesons via the wkb approximation method. *Advances in High Energy Physics*, 2020, 2020.
- [5] Jerome Martin and Dominik J Schwarz. Wkb approximation for inflationary cosmological perturbations. *Physical Review D*, 67(8):083512, 2003.
- [6] F Einaudi and CO Hines. Wkb approximation in application to acoustic–gravity waves. *Canadian Journal of Physics*, 48(12):1458–1471, 1970.
- [7] Bekir Baytaş, Martin Bojowald, and Sean Crowe. Effective potentials from semi-classical truncations. *Physical Review A*, 99(4):042114, 2019.
- [8] Jorge L Cervantes-Cota and George Smoot. Cosmology today—a brief review. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1396, pages 28–52. American Institute of Physics, 2011.
- [9] Jaewon Yoo and Yuki Watanabe. Theoretical models of dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, 21(12):1230002, 2012.
- [10] Annika HG Peter. Dark matter: a brief review. *arXiv preprint arXiv:1201.3942*, 2012.
- [11] Özgür Akarsu, Nihan Katirci, Nese Özdemir, and J Alberto Vázquez. Anisotropic massive brans–dicke gravity extension of the standard lambda-cdm model. *The European Physical Journal C*, 80(1):1–26, 2020.

- [12] Stephen R Green and Robert M Wald. How well is our universe described by an frw model? *Classical and Quantum Gravity*, 31(23):234003, 2014.
- [13] A Yu Kamenshchik. Quantum cosmology and late-time singularities. *Classical and Quantum Gravity*, 30(17):173001, 2013.
- [14] Michael P Ryan and Lawrence C Shepley. *Homogeneous relativistic cosmologies*. Princeton University Press, 2015.
- [15] Riccardo MORICONI, Salvatore CAPOZZIELLO, and Giovanni MONTANI. Dynamical systems in quantum cosmology.
- [16] Alexander Vilenkin. Predictions from quantum cosmology. *Physical Review Letters*, 74(6):846, 1995.
- [17] Murray Gell-Mann and James B Hartle. Quantum mechanics in the light of quantum cosmology. In *Foundations Of Quantum Mechanics In The Light Of New Technology: Selected Papers from the Proceedings of the First through Fourth International Symposia on Foundations of Quantum Mechanics*, pages 347–369. World Scientific, 1996.
- [18] Martin Bojowald and Aureliano Skirzewski. Effective equations of motion for quantum systems. *Reviews in Mathematical Physics*, 18(07):713–745, 2006.
- [19] L Aragón-Muñoz, G Chacón-Acosta, and H Hernandez-Hernandez. Effective quantum tunneling from a semiclassical momentous approach. *International Journal of Modern Physics B*, 34(29):2050271, 2020.
- [20] Martin Bojowald, David Brizuela, Hector H Hernández, Michael J Koop, and Hugo A Morales-Técotl. High-order quantum back-reaction and quantum cosmology with a positive cosmological constant. *Physical Review D*, 84(4):043514, 2011.
- [21] Florian Scheck. *Mechanics: from Newton’s laws to deterministic chaos*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [22] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical mechanics*, 2002.
- [23] Lev Davidovich Landau and Evgenii Mikhailovich Lifshitz. *Mechanics: Volume 1*, volume 1. Butterworth-Heinemann, 1976.
- [24] Robert L Bryant. Geometry of manifolds with special holonomy. *150 Years of Mathematics at Washington University in St. Louis: Sesquicentennial of Mathematics at Washington University, October 3-5, 2003, Washington University, St. Louis, Missouri*, 395:29, 2006.
- [25] Melvin G Calkin. *Lagrangian and Hamiltonian mechanics*. World Scientific, 1996.

- [26] GV Kraniotis and SB Whitehouse. Compact calculation of the perihelion precession of mercury in general relativity, the cosmological constant and jacobi's inversion problem. *Classical and Quantum Gravity*, 20(22):4817, 2003.
- [27] Slava G Turyshev. Experimental tests of general relativity. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 58:207–248, 2008.
- [28] Howard P Robertson. Postulate versus observation in the special theory of relativity. *Reviews of modern Physics*, 21(3):378, 1949.
- [29] JPC Mbagwu, ZL Abubakar, and JO Ozuomba. A review article on einstein special theory of relativity. *International Journal of Theoretical and Mathematical Physics*, 10(3):65–71, 2020.
- [30] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [31] Estelle Asmodelle. Tests of general relativity: A review. *arXiv preprint arXiv:1705.04397*, 2017.
- [32] Luis Lehner. Numerical relativity: a review. *Classical and Quantum Gravity*, 18(17):R25, 2001.
- [33] John Earman and Clark Glymour. Einstein and hilbert: Two months in the history of general relativity. *Archive for History of Exact Sciences*, pages 291–308, 1978.
- [34] Cormac O’Raifeartaigh, Michael O’Keeffe, Werner Nahm, and Simon Mitton. Einstein’s 1917 static model of the universe: a centennial review. *The European Physical Journal H*, 42(3):431–474, 2017.
- [35] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [36] John C Baez and Javier P Muniain. *Gauge fields, knots and gravity*, volume 4. World Scientific Publishing Company, 1994.
- [37] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [38] Syksy Räsänen, Krzysztof Bolejko, and Alexis Finoguenov. New test of the friedmann-lemaitre-robertson-walker metric using the distance sum rule. *Physical review letters*, 115(10):101301, 2015.
- [39] Kip S Thorne, Charles W Misner, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Freeman, 2000.
- [40] Barbara Ryden. *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 2017.
- [41] Asim Orhan Barut. *Electrodynamics and classical theory of fields & particles*. Courier Corporation, 1980.

- [42] Giovanni Montani, Marco Valerio Battisti, Riccardo Benini, and Giovanni Imponente. *Primordial cosmology*. World Scientific, 2011.
- [43] Eugeny Babichev, V Dokuchaev, and Yu Eroshenko. Dark energy cosmology with generalized linear equation of state. *Classical and Quantum Gravity*, 22(1):143, 2004.
- [44] MENG Xin-He, REN Jie, and Hu Ming-Guang. Friedmann cosmology with a generalized equation of state and bulk viscosity. *Communications in Theoretical Physics*, 47(2):379, 2007.
- [45] Jie Ren and Xin-He Meng. Dark viscous fluid described by a unified equation of state in cosmology. *International Journal of Modern Physics D*, 16(08):1341–1348, 2007.
- [46] Wendy L Freedman and Barry F Madore. The hubble constant. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 48:673–710, 2010.
- [47] Howard Percy Robertson. The uncertainty principle. *Physical Review*, 34(1):163, 1929.
- [48] Viatcheslav Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge university press, 2005.
- [49] Scott Dodelson. *Modern cosmology*. Elsevier, 2003.
- [50] Özgür Akarsu, Nihan Katırcı, Suresh Kumar, Rafael C Nunes, Burcu Öztürk, and Shivani Sharma. Rastall gravity extension of the standard cdm model: theoretical features and observational constraints. *Eur. Phys. J. C*, 80:1050, 2020.
- [51] Jie Ren, Xin-He Meng, and Liu Zhao. Hamiltonian formalism in friedmann cosmology and its quantization. *Physical Review D*, 76(4):043521, 2007.
- [52] Jie Ren and Xin-He Meng. Modified equation of state, scalar field, and bulk viscosity in friedmann universe. *Physics Letters B*, 636(1):5–12, 2006.
- [53] Daniel R Bes. *Quantum mechanics: a modern and concise introductory course*. Springer, 2007.
- [54] Michael Thomas Lynn. Blackbody radiation. 2017.
- [55] Shaul Katzir. Thermodynamic deduction versus quantum revolution: The failure of richardson’s theory of the photoelectric effect. *Annals of science*, 63(4):447–469, 2006.
- [56] Nouredine Zettili. *Quantum mechanics: concepts and applications*, 2003.
- [57] Jun John Sakurai and Eugene D Commins. *Modern quantum mechanics*, revised edition, 1995.

- [58] John David Jackson. *Mathematics for quantum mechanics: an introductory survey of operators, eigenvalues, and linear vector spaces*. Courier Corporation, 2012.
- [59] Ramamurti Shankar. *Principles of quantum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [60] Héctor H Hernández and Guillermo Chacón-Acosta. Effective equations for the quantum pendulum from momentous quantum mechanics. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1473, pages 168–177. American Institute of Physics, 2012.
- [61] Martin Bojowald. *Quantum cosmology: a fundamental description of the universe*, volume 835. Springer Science & Business Media, 2011.
- [62] Martin Bojowald. Quantum cosmology: effective theory. *Classical and Quantum Gravity*, 29(21):213001, 2012.
- [63] Bekir Baytaş, Martin Bojowald, and Sean Crowe. Canonical tunneling time in ionization experiments. *Physical Review A*, 98(6):063417, 2018.
- [64] Martin Bojowald. *Foundations of quantum cosmology*. IOP Publishing, 2020.
- [65] Martin Bojowald and Aureliano Skirzewski. Quantum gravity and higher curvature actions. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 4(01):25–52, 2007.
- [66] Artur Alho, Claes Uggla, and John Wainwright. Perturbations of the lambda-cdm model in a dynamical systems perspective. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(09):045, 2019.
- [67] AM Velasquez-Toribio and A dos R Magnago. Observational constraints on the non-flat model and a null test using the transition redshift. *The European Physical Journal C*, 80(6):562, 2020.
- [68] David Benisty, Eduardo I Guendelman, Emil Nissimov, and Svetlana Pacheva. Lambda-cdm as a noether symmetry in cosmology. *arXiv preprint arXiv:2003.13146*, 2020.
- [69] Özgür Akarsu, John D Barrow, Charles VR Board, N Merve Uzun, and J Alberto Vazquez. Screening lambda in a new modified gravity model. *The European Physical Journal C*, 79(10):1–18, 2019.
- [70] Lorenzo Cornalba and Miguel S Costa. A new cosmological scenario in string theory. *Physical Review D*, 66(6):066001, 2002.
- [71] L Cornalba, MS Costa, and C Kounnas. A resolution of the cosmological singularity with orientifolds. *Nuclear Physics B*, 637(1-3):378–394, 2002.
- [72] Martin Bojowald. Absence of a singularity in loop quantum cosmology. *Physical Review Letters*, 86(23):5227, 2001.

- [73] PCW Davies and SD Unwin. Why is the cosmological constant so small? *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 377(1769):147–149, 1981.
- [74] Martin Bojowald, Suddhasattwa Brahma, Sean Crowe, Ding Ding, and Joseph McCracken. Multi-field inflation from single-field models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021(08):047, 2021.
- [75] John D Barrow and Richard A Matzner. The homogeneity and isotropy of the universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181(4):719–727, 1977.
- [76] Allan Sandage, GA Tammann, and Eduardo Hardy. Limits on the local deviation of the universe from a homogeneous model. *The Astrophysical Journal*, 172:253, 1972.
- [77] Diego Leonardo Cáceres Uribe. Ecuación de desvío geodésico en cosmologías de bianchi y sus implicaciones cosmológicas. *Observatorio Astronómico*, 2010.
- [78] John Barrow. Light elements and the isotropy of the universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 175(2):359–370, 1976.
- [79] Simone Calogero and J Mark Heinzle. Bianchi cosmologies with anisotropic matter: locally rotationally symmetric models. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 240(7):636–669, 2011.
- [80] John D Barrow and DH Sonoda. Asymptotic stability of bianchi type universes. *Physics Reports*, 139(1):1–49, 1986.
- [81] Marco Valerio Battisti and Giovanni Montani. The mixmaster universe in a generalized uncertainty principle framework. *Physics Letters B*, 681(2):179–184, 2009.
- [82] Chandrima Ganguly and Marco Bruni. Quasi-isotropic cycles and nonsingular bounces in a mixmaster cosmology. *Physical Review Letters*, 123(20):201301, 2019.
- [83] Wung-Hong Huang. Isotropization and cosmological dimensional reduction in the cosmological models with a viscous fluid. *Physics Letters A*, 136(1-2):21–25, 1989.
- [84] Luis P Chimento and Mónica Forte. Anisotropic k-essence cosmologies. *Physical Review D*, 73(6):063502, 2006.
- [85] Esteban Calzetta. Anisotropy dissipation in quantum cosmology. *Physical Review D*, 43(8):2498, 1991.
- [86] David Brizuela and Sara F Uria. Semiclassical study of the mixmaster model: The quantum kasner map. *Physical Review D*, 106(6):064051, 2022.



- [87] Charles W Misner. The mixmaster cosmological metrics. *Deterministic Chaos in General Relativity*, pages 317–328, 1994.
- [88] Abhay Ashtekar. Singularity resolution in loop quantum cosmology: a brief overview. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 189, page 012003. IOP Publishing, 2009.
- [89] Edward Wilson-Ewing. A quantum gravity extension to the mixmaster dynamics. *Classical and Quantum Gravity*, 36(19):195002, 2019.
- [90] Alejandro Corichi and Edison Montoya. Effective dynamics in bianchi type ii loop quantum cosmology. *Physical Review D*, 85(10):104052, 2012.
- [91] Alejandro Corichi and Edison Montoya. Loop quantum cosmology of bianchi ix: effective dynamics. *Classical and Quantum Gravity*, 34(5):054001, 2017.
- [92] David Brizuela and Unai Muniain. A moment approach to compute quantum-gravity effects in the primordial universe. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(04):016, 2019.
- [93] David J Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Pearson International Edition (Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005), 1960.
- [94] Nicholas Young. *An introduction to Hilbert space*. Cambridge university press, 1988.
- [95] Lokenath Debnath and Dambaru Bhatta. *Integral transforms and their applications*. CRC press, 2014.
- [96] Henrik Bruus and Karsten Flensberg. *Many-body quantum theory in condensed matter physics: an introduction*. OUP Oxford, 2004.
- [97] Eva Martín Fierro. *Los estados coherentes en la descripción semiclásica de la mecánica cuántica*. Universidad de La Laguna (Canary Islands, Spain), 2004.
- [98] Michael Spivak. *Cálculo en variedades*. Reverté, 2021.
- [99] Timothy H Boyer. Blackbody radiation in classical physics: A historical perspective. *American Journal of Physics*, 86(7):495–509, 2018.
- [100] Stephen Klassen. The photoelectric effect: Reconstructing the story for the physics classroom, 2011.
- [101] Jim Hefferon. Linear algebra third edition. 2018.
- [102] Artur D Chernin. George gamow and the big bang. *Space Science Reviews*, 74(3):447–454, 1995.
- [103] Paul Busch, Teiko Heinonen, and Pekka Lahti. Heisenberg’s uncertainty principle. *Physics Reports*, 452(6):155–176, 2007.

- [104] T Roy Choudhury and T Padmanabhan. Cosmological parameters from supernova observations: A critical comparison of three data sets. *Astronomy & Astrophysics*, 429(3):807–818, 2005.
- [105] D Sen, SK Das, AN Basu, and S Sengupta. Significance of ehrenfest theorem in quantum–classical relationship. *Current Science*, pages 536–541, 2001.
- [106] Bekir Baytaş, Martin Bojowald, and Sean Crowe. Faithful realizations of semi-classical truncations. *Annals of Physics*, 420:168247, 2020.
- [107] Jonathan J Halliwell. Derivation of the wheeler-dewitt equation from a path integral for minisuperspace models. *Physical Review D*, 38(8):2468, 1988.
- [108] MD Pollock. On the derivation of the wheeler-dewitt equation in the heterotic superstring theory. *International Journal of Modern Physics A*, 7(17):4149–4165, 1992.
- [109] Abhay Ashtekar, Martin Bojowald, and Jerzy Lewandowski. Mathematical structure of loop quantum cosmology. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 7(2):233–268, 2003.
- [110] DJ Fixsen. The temperature of the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, 707(2):916, 2009.
- [111] Abhay Ashtekar and Joseph Samuel. Bianchi cosmologies: the role of spatial topology. *Classical and Quantum Gravity*, 8(12):2191, 1991.