

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIHUAHUA

FACULTAD DE INGENIERÍA

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO



**HERRAMIENTA COMPUTACIONAL PARA EL ANÁLISIS
ESTRUCTURAL DE PLACAS LAMINADAS**

POR:

LUIS ANDRÉS OSUNA TIRADO

**TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN ESTRUCTURAS**

CHIHUAHUA, CHIH., MÉXICO

ABRIL 2022



Herramienta computacional para el análisis estructural de placas laminadas. Tesis presentada por Luis Andrés Osuna Tirado como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en estructuras, ha sido aprobado y aceptado por:

M.I. Javier González Cantú
Director de la Facultad de Ingeniería



Dr. Alejandro Villalobos Aragón
Secretario de Investigación y Posgrado



M. A. María de Lourdes Flores Portillo
Coordinadora Académica



Dr. Alberto Díaz Díaz
Director de Tesis

Mayo 2022

Fecha

COMITÉ
Dr. Alberto Díaz Díaz
M.E. Mirna Teresita Armendáriz Hernández
Dr. Mario Alberto Madrid Pérez
Dr. Axel Fernando Domínguez Alvarado



ING. LUIS ANDRÉS OSUNA TIRADO
Presente

En atención a su solicitud relativa al trabajo de tesis para obtener el grado de Maestro en Estructuras, nos es grato transcribirle el tema aprobado por esta Dirección, propuesto y dirigido por el director **Dr. Alberto Díaz Díaz** para que lo desarrolle como tesis, con el título: **“HERRAMIENTA COMPUTACIONAL PARA EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE PLACAS LAMINADAS”**.

Índice de Contenido

1. Resumen
2. Introducción
 - 2.1 Objetivos
 - 2.2 Hipótesis
 - 2.3 Justificación
3. Marco teórico
 - 3.1 Mecánica del medio continuo sólido
 - 3.2 Generalidades de materiales compuestos
 - 3.3 Mecánica de materiales compuestos y placas laminadas
4. Antecedentes
 - 4.1 Programas para análisis de materiales compuestos
 - 4.2 Fórmulas de homogeneización
5. Materiales y métodos
 - 5.1 Ecuaciones que deberá resolver el método numérico
 - 5.2 Ecuaciones genéricas en COMSOL y el software hecho en SCILAB por CIMAV
 - 5.3 Adaptación de las ecuaciones en COMSOL Multiphysics y en SCILAB



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
CHIHUAHUA

6. Resultados y discusión
 - 6.1 Validación
7. Conclusión
8. Bibliografía

Solicitamos a Usted tomar nota de que el título del trabajo se imprima en lugar visible de los ejemplares del documento terminal.

ATENTAMENTE

“Naturam subiecit aliis”

EL DIRECTOR

M.I. JAVIER GONZÁLEZ CANTÚ

**FACULTAD DE
INGENIERÍA
U.A.CH.**



DIRECCIÓN

EL SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN

Y POSGRADO

DR. ALEJANDRO VILLALOBOS ARAGÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA
Circuito No.1, Campus Universitario 2
Chihuahua, Chih., México. C.P. 31125
Tel. (614) 442-95-00
www.fing.uach.mx



AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a DIOS, por haberme permitido estar presente en esta época y lugar, además de haberme proporcionado las capacidades mentales necesarias para participar en este proyecto.

A mis padres: Ana María Tirado Vizcarra y Abundio Osuna Vizcarra; por haberme dado su apoyo para completar mis estudios.

A CIMAV; por haberme permitido trabajar dentro de sus instalaciones, por haberme prestado el equipo necesario para realizar las acciones requeridas en el avance de este proyecto, además de haberme proporcionado una beca.

A Rubén Castañeda; por haberme ayudado en algunos pasos necesarios para avanzar en el proceso de desarrollo de este trabajo de investigación.

Al Dr. Alberto Díaz Díaz; por haberme permitido participar en un proyecto que permitirá mejorar la eficiencia en la realización de trabajos de ingeniería y por haberme asesorado en la adquisición de los conocimientos necesarios sobre mecánica de materiales compuestos, en el manejo del software SCILAB y elementos finitos; requeridos para trabajar en este proyecto de innovación.

A los sinodales: Mirna Teresita Armendáriz Hernández, Mario Alberto Madrid Pérez y Axel Fernando Domínguez Alvarado; por haberme apoyado en la revisión de esta tesis y por haberme proporcionado asesorías de SCILAB, COMSOL y elementos finitos.

Finalmente agradezco a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chihuahua; por haberme proporcionado los conocimientos del área de la ingeniería civil, los cuales son necesarios en este proyecto.



Índice

I. Resumen	6
II. Introducción	7
II.1 Objetivos	9
II.1.1 Objetivo general.....	9
II.1.2 Objetivos específicos	9
II.2 Hipótesis	10
II.3 Justificación	10
III. Marco teórico.....	11
III.1 Mecánica del medio continuo sólido	11
III.1.1 Matriz de deformaciones	12
III.1.2 Esfuerzos	13
III.1.3 Ecuaciones de equilibrio local.....	14
III.1.4 Ecuaciones de comportamiento lineal elástico.....	15
III.2 Generalidades de materiales compuestos	16
III.2.1 Láminas	17
III.2.2 Laminado	18
III.2.3 Materiales compuestos avanzados.....	19
III.3 Mecánica de materiales compuestos y placas laminadas	19
III.3.1 Homogenización de propiedades mecánicas (propiedades efectivas).....	19
III.3.2 Comportamiento de una capa unidireccional	20
III.3.3 Comportamiento del laminado	23
IV. Antecedentes	32
IV.1 Programas para análisis de materiales compuestos.....	32
IV.2 Fórmulas de homogeneización.....	34
IV.2.1 Modelo de Bridgin	34



IV.2.2 Modelos semiempíricos.....	3 4
V. Materiales y métodos.....	3 8
V.1 Ecuaciones que deberá resolver el método numérico.....	3 8
V.2 Ecuaciones genéricas en COMSOL y el software hecho en SCILAB por CIMAV...	4 1
V.3 Adaptación de las ecuaciones en COMSOL Multiphysics y en SCILAB.....	4 2
VI. Resultados y discusión	4 4
VI.1 Validación	4 4
VI.1.1 Laminados A y B.....	4 7
VI.1.2 Laminados C y D.....	5 3
VI.1.3 Gráficas de esfuerzos y deformaciones para el laminado B sujeto a la tensión N_y	6 0
VII. Conclusión	6 7
VIII. Bibliografía.....	6 8



Índice de figuras

Figura 1	Uso de materiales compuestos laminados en el diseño de vehículos aéreos (M. Jones, 1984).....	8
Figura 2	Tipos de refuerzo para resistencia a cortante (A. Perez 2014).....	8
Figura 3	Elemento estructural reforzado con materiales compuestos (A. Perez 2014).....	9
Figura 4	Campo de transformación (Islas, 2019)	1 2
Figura 5	Vectores esfuerzo en las caras de un cubo infinitesimal sólido (Gubert et al. 2012)	1 4
Figura 6	Láminas con fibras unidireccionales y con fibras entretrejidas (M. Jones, 1984) .	1 7
Figura 7	Tipos de diagrama esfuerzo-deformación para los constituyentes de una lámina (M. Jones, 1984).....	1 8
Figura 8	Estructura de un laminado (Besednjak, 2009)	1 8
Figura 9	Elemento triangular para ecuaciones de grado 1 (Cardona & Fachimotti, 2019).	2 9
Figura 10	Elemento triangular para ecuaciones de grado 2 (Cardona & Fachimotti, 2019)	3 0
Figura 11	Elemento triangular para ecuaciones de grado 3 (Cardona & Fachimotti, 2019)	3 0
Figura 12	Ventana de AIM.....	3 3
Figura 14	Diagrama del laminado y su respectivo empotramiento.	4 6
Figura 15	Diagrama del laminado sujeto a la tensión N_y (a), al momento M_y (b), a la fuerza cortante Q (c).....	4 6



I. Resumen

Existen software que permiten el análisis estructural de placas laminadas por medio del método de elementos finitos. Sin embargo, éstos suelen ser costosos y los que son gratuitos no cumplen con uno de los requisitos: análisis de placas laminadas o el uso del método de elementos finitos. El objetivo de este trabajo es desarrollar, mediante el programa SCILAB, un software gratuito que permita el análisis estructural de placas laminadas por medio del método de elementos finitos. Por ser gratuito, este software puede ser utilizado con fines didácticos en el caso de estudiantes de ingeniería y para el diseño, aumentando el beneficio en relación al costo de diseño.

El programa desarrollado en este trabajo calcula la matriz ABDF por el método de inversa de complianzas y por medio del método de elementos finitos calcula desplazamientos generalizados, deformaciones generalizadas, fuerzas generalizadas, fuerzas generalizadas por capa y esfuerzos por capa. Los resultados de estos cálculos pueden ser graficados por medio de mapas de colores.

Durante el proceso de desarrollo del software se programaron los cálculos y las gráficas que permiten el análisis estructural de placas laminadas. Una vez escritos los algoritmos necesarios para los cálculos, los resultados se confrontan con los de un software comercial, verificándose así qué tan confiable es este software. Finalmente, se analizan los alcances que tuvo el programa, es decir, se hace una descripción de los aciertos y problemas que se tuvieron, y se determinan los puntos pendientes para tener una herramienta amigable.

II. Introducción

Los materiales compuestos son materiales que se forman por la combinación de dos o más materiales a escala macroscópica, de tal manera que los materiales pueden identificarse a simple vista o en un microscopio óptico. Algunas de las propiedades que pueden mejorarse al emplear materiales compuestos son (M. Jones, 1984): resistencia, rigidez, resistencia a la corrosión, resistencia a la fatiga, peso, comportamiento dependiente de la temperatura, aislamiento térmico, aislamiento acústico. No todas las propiedades de esos materiales mejoran y no todas son requeridas, añadiendo que algunas de las propiedades del material están en conflicto, por ejemplo: la conductividad térmica y el aislamiento térmico. Teniendo en cuenta lo anterior, el material se fabrica con propiedades que se requieran en el diseño (M. Jones, 1984).

Además de seleccionar las propiedades que se deben mejorar de acuerdo a criterios de diseño, también se debe tener en cuenta la geometría del refuerzo por lo cual los materiales compuestos son clasificados de acuerdo a la geometría de éste, el cual puede consistir de hojuelas, partículas o fibras. Los materiales compuestos particulados pueden estar compuestos de partículas u hojuelas y son isotrópicos debido a la distribución aleatoria de las partículas. Las hojuelas tienen una geometría plana y las fibras, las cuales son estructuras largas con una sección transversal pequeña (Soberanis, 2006). En este trabajo se abordarán los materiales reforzados con fibras. Las fibras se caracterizan no solo por su gran relación longitud/diámetro, sino también por su diámetro de un tamaño próximo al de la estructura cristalina (M. Jones, 1984). Para indicar la efectividad de un material se suelen emplear la rigidez específica (relación rigidez/densidad) y la resistencia específica (relación resistencia/densidad). Muchas fibras son mucho más rígidas y fuertes en comparación a la forma monolítica del material.

En la ingeniería aeroespacial, gracias a su poco peso y gran resistencia, los materiales compuestos laminados se suelen usar en el diseño de las alas, aletas verticales y horizontales, además de las puertas y otras partes de los aviones, es decir, en la estructura secundaria de éste (ver figura 1).

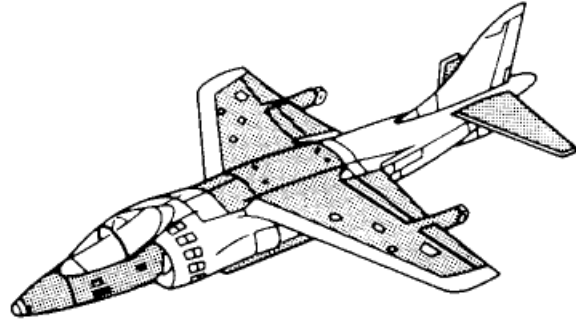


Figura 1. Uso de materiales compuestos laminados en el diseño de vehículos aéreos (M. Jones, 1984).

Los materiales compuestos también tienen aplicaciones en ingeniería civil. Estos materiales se usan para reforzado de concreto, revestimiento de concreto, refuerzo interno y externo de estructuras de concreto compuesto, entre otras aplicaciones (Fangueiro, 2011). Al ser reforzadas con lámina de fibra de carbono, las estructuras de concreto logran incrementar enormemente su resistencia a flexión y cortante. Pueden utilizarse en vigas, pilares y forjados. Existen tres posibles formas de aplicación (ver Figura 2): la adhesión superficial del material compuesto preconformado, la fabricación y adhesión del material in situ y la introducción dentro de la sección transversal (A. Perez 2014). Para reforzar elementos a flexión tales como vigas, losas y muros; las láminas son una opción práctica. Mediante este refuerzo, se aumenta la capacidad de elementos reforzados, pretensados y postensados hasta un 70%. Para esto, el refuerzo se coloca con las fibras en dirección paralela a la longitud del elemento al igual que el acero de refuerzo en un elemento de concreto. En la Figura 3 , se muestra el esquema de una viga reforzada con un material compuesto (A. Perez 2014).

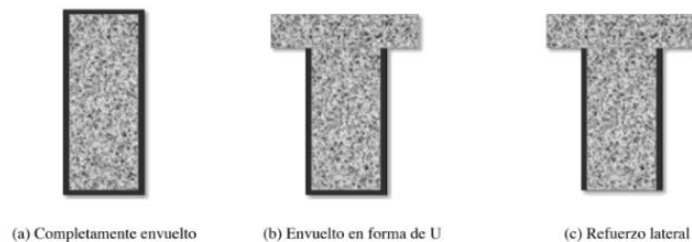


Figura 2. Tipos de refuerzo para resistencia a cortante (A. Perez 2014).

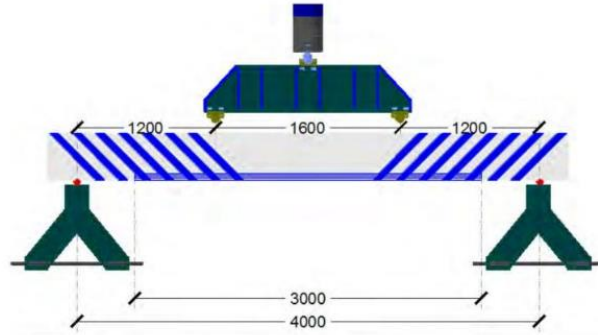


Figura 3. Elemento estructural reforzado con materiales compuestos (A. Perez 2014).

Para el diseño de los laminados, se utiliza software que puede ser costoso, sobre todo si se trata de software que involucra cálculos de elementos finitos. Este trabajo consiste en crear un programa gratuito en SCILAB que analice placas laminadas mediante el método de elementos finitos con el fin de reducir los costos en diferentes áreas de la ingeniería, además de poderlo usar con fines didácticos entre los estudiantes de dicha área. Este programa es diseñado para ser capaz de trabajar con materiales compuestos, pues éstos tienen muchas aplicaciones en muchas áreas de la ingeniería. Los resultados de este programa se validan con los de otros software como COMSOL Multiphysics y MAFLAM.

II.1 Objetivos

II.1.1 Objetivo general

Crear una herramienta computacional gratuita que permita realizar cálculos de elementos finitos para el análisis estructural de placas laminadas.

II.1.2 Objetivos específicos

1. Seleccionar un modelo matemático de buena precisión que permita predecir el comportamiento de placas laminadas.
2. Escribir y comprender las ecuaciones del modelo.
3. Escribir el algoritmo de resolución de las ecuaciones con el método de elementos finitos.
4. Programar las ecuaciones en el software SCILAB (Un software gratuito similar al MATLAB).
5. Validar el programa confrontando los resultados con los de otros software comerciales.



II.2 Hipótesis

Los algoritmos matemáticos y códigos gráficos del software gratuito SCILAB pueden servir para generar un software gratuito para el análisis estructural de placas laminadas.

II.3 Justificación

Hay otros programas que pueden ser utilizados para análisis estructural de placas laminadas y que emplean el método de elementos finitos, pero estos programas son muy costosos. Este trabajo pretende desarrollar un programa que realice los mismos procedimientos y que sea gratuito. Este proyecto beneficiará a ingenieros civiles y a otros ingenieros que requieran del uso de materiales compuestos, además se beneficiarán estudiantes de estas ingenierías, ya que este programa podrá ser usado con fines didácticos. Por ser gratuito, el software desarrollado en este proyecto permitirá un aumento del beneficio en relación a costos de diseño.



III. Marco teórico

Antes de definir los materiales compuestos se deberán conocer los tipos de materiales de acuerdo a la manera en que se presentan las propiedades mecánicas de los materiales, entre los que se incluyen los materiales isotrópicos, los anisotrópicos y los ortotrópicos. En un material isotrópico, las propiedades mecánicas son las mismas en cualquier dirección. Un material ortotrópico tiene propiedades distintas en tres direcciones que son perpendiculares entre sí, formando planos cuyas propiedades varían de forma simétrica. Finalmente, los anisotrópicos son aquellos en los cuales las propiedades cambian conforme a la dirección de ensayo, además no poseen planos donde las propiedades sean simétricas.

III.1 Mecánica del medio continuo sólido

La mecánica de continuo estudia el comportamiento mecánico de los sólidos y fluidos en una escala macroscópica, ignorando la discontinuidad del material en escalas atómicas, considerándolo uniforme en todo su volumen (Linero & Garzón, 2010). En la mecánica del medio continuo, una partícula material ocupa un punto del espacio y al sólido se le pueden atribuir campos ya sea de densidad o desplazamiento, los cuales son ecuaciones continuas en función de la posición. Para aplicar la mecánica de continuo, se deben tomar en cuenta los siguientes conceptos, cuyas definiciones se encuentran en (Islas, 2019):

- Punto geométrico. Un punto geométrico es aquel cuyas coordenadas en el espacio son las mismas de forma permanente.
- Punto material. Un punto material o partícula es un punto adimensional situado dentro del dominio de material.
- Campo de transformación. Es una función que mapea un punto material de la posición de referencia a la posición actual (ver Figura 4).
- Campo de desplazamiento. Es un campo de vector que va desde el punto geométrico ocupado por la partícula en la configuración de referencia hasta el punto geométrico ocupado por la misma partícula en la configuración final.

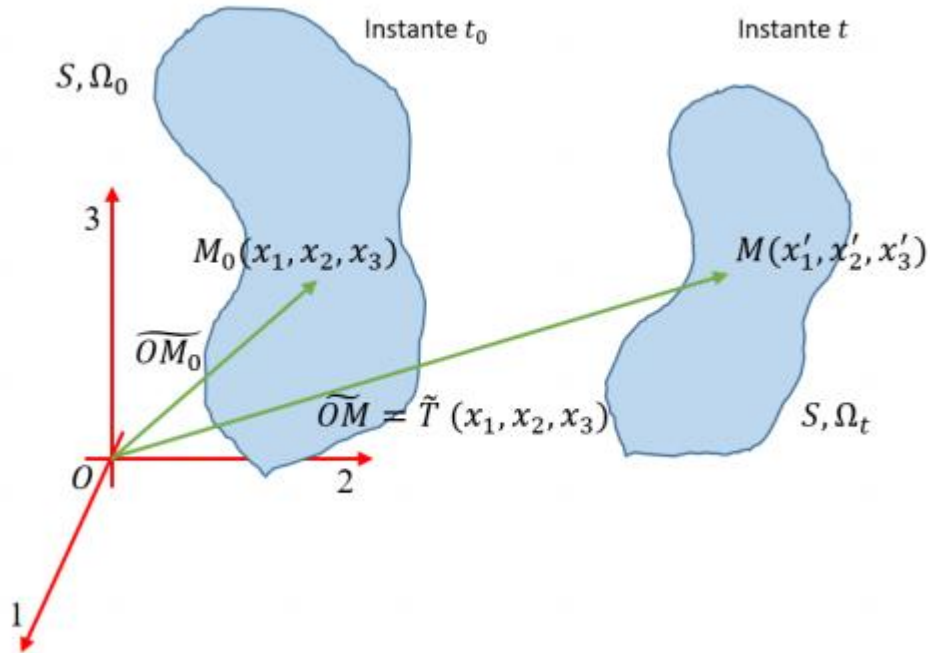


Figura 4. Campo de transformación (Islas, 2019).

III.1.1 Matriz de deformaciones

Se define la matriz de deformaciones de Green-Cauchy $\tilde{\epsilon}$ de la siguiente manera (Gubert et al. 2012):

$$\tilde{\epsilon}(x_0) = \frac{1}{2} (\widetilde{\text{grad}} \tilde{U}(\tilde{x}_0) + \widetilde{\text{grad}}^t \tilde{U}(\tilde{x}_0)) \tag{1}$$

$$\tilde{\epsilon}(x_0) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Donde $\widetilde{\text{grad}}$ es el operador gradiente aplicado al vector desplazamiento \tilde{U} , \tilde{x}_0 el vector de posición inicial. Las componentes en la diagonal son deformaciones longitudinales, mientras que las otras son angulares. Las componentes de la matriz de deformación se expresan de la siguiente forma en función de las componentes del vector de desplazamiento:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} \tag{3}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y} \tag{4}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad (5)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \quad (6)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) \quad (7)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) \quad (8)$$

La matriz de deformaciones de Green-Cauchy se emplea en pequeñas perturbaciones y es una simplificación de la matriz de deformaciones de Green-Lagrange, esta última se utiliza inclusive en grandes transformaciones y tiene por expresión (Gubert et al. 2012)

$$\tilde{\epsilon}(x_0) = \frac{1}{2} (\widetilde{\text{grad}}^t \tilde{T}(x_0) \widetilde{\text{grad}} \tilde{T}(x_0) - \tilde{\mathbf{I}}) \quad (9)$$

donde \tilde{T} es el campo de transformación.

III.1.2 Esfuerzos

Otro campo a tomar en cuenta para el análisis estructural es la matriz de esfuerzos.

$$\tilde{\sigma}(x) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (10)$$

En la diagonal de la matriz se encuentran los esfuerzos normales, mientras que el resto de componentes de la matriz corresponden a esfuerzos cortantes.

En cada una de las caras del cubo sólido infinitesimal de la Figura 5, como se menciona en (López, 1999), actúa un vector esfuerzo. Sus expresiones son:

$$\vec{T}_1 = \sigma_{11} \vec{e}_1 + \sigma_{12} \vec{e}_2 + \sigma_{13} \vec{e}_3 \quad (11)$$

$$\vec{T}_2 = \sigma_{21} \vec{e}_1 + \sigma_{22} \vec{e}_2 + \sigma_{23} \vec{e}_3 \quad (12)$$

$$\vec{T}_3 = \sigma_{31} \vec{e}_1 + \sigma_{32} \vec{e}_2 + \sigma_{33} \vec{e}_3 \quad (13)$$

De manera alternativa, las 3 expresiones se escriben de forma general **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

$$\vec{T}_i = \sigma_{ij}\vec{e}_i \tag{14}$$

dónde:

\vec{T}_i = vector de esfuerzos

σ_{ij} = Componentes de la matriz de esfuerzos

\vec{e}_i = vectores unitarios del sistema de ejes cartesiano escogido y que para este cubo son normales a cada cara del mismo.

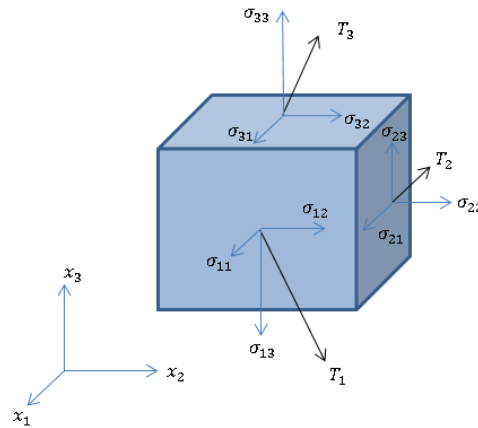


Figura 5. Vectores esfuerzo en las caras de un cubo infinitesimal sólido (Gubert et al. 2012).

III.1.3 Ecuaciones de equilibrio local

El equilibrio de un cubo infinitesimal se traduce mediante las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_{vx} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_{vy} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_{vz} = 0 \tag{17}$$

donde f_{vi} son las componentes de la fuerza volumétrica.



A continuación, se hablará de la ecuación de comportamiento que relaciona esfuerzos y deformaciones.

III.1.4 Ecuaciones de comportamiento lineal elástico

Para un material isotrópico lineal elástico existe la siguiente relación entre esfuerzos y deformaciones (Eringen, 1980):

$$\tilde{\sigma}(x) = \frac{E}{1+\nu} \tilde{\epsilon} + \frac{\nu E \text{tr}(\tilde{\epsilon}(x_0))}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tilde{\mathbf{I}} \quad (18)$$

de forma equivalente

$$\tilde{\epsilon}(x) = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma}(x) - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\tilde{\sigma}(x)) \tilde{\mathbf{I}} \quad (19)$$

donde tr es la traza de la matriz, E es el módulo de elasticidad y ν es el coeficiente de Poisson

Se definen los coeficientes de Lamé $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ y $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Se obtienen entonces las siguientes ecuaciones escalares:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad (20)$$

$$\sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) \quad (21)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{xx}) \quad (22)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} \quad (23)$$

$$\sigma_{xz} = 2\mu\epsilon_{xz} \quad (24)$$

$$\sigma_{yz} = 2\mu\epsilon_{yz} \quad (25)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de equilibrio, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) \right) + f_{vx} \quad (26)$$
$$= 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_y}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \right) + f_{vy} \quad (27)$$
$$= 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) \right) + f_{vz} \quad (28)$$
$$= 0$$

Estas ecuaciones son las que típicamente se plantea en un problema 3D resuelto en un software de elementos finitos. Se aprecia que, en estas ecuaciones, no aparecen explícitamente los esfuerzos, únicamente los desplazamientos. Estas ecuaciones son solo aplicables para materiales isotrópicos.

III.2 Generalidades de materiales compuestos

Los materiales compuestos son materiales que se forman por la combinación de dos o más materiales a escala macroscópica, de tal manera que los materiales pueden identificarse a simple vista o en un microscopio óptico. Algunas de las propiedades que pueden mejorarse al emplear materiales compuestos son (M. Jones, 1984): resistencia, rigidez, resistencia a la corrosión, resistencia a la fatiga, peso, comportamiento dependiente de la temperatura, aislamiento térmico, aislamiento acústico. No todas las propiedades de esos materiales mejoran y no todas son requeridas, añadiendo que algunas de las propiedades del material están en conflicto, por ejemplo: la conductividad térmica y el aislamiento térmico. Teniendo en cuenta lo anterior, el material se fabrica con propiedades que se requieran en el diseño (M. Jones, 1984).

Además de seleccionar las propiedades que se deben mejorar de acuerdo a criterios de diseño, también se debe tener en cuenta la geometría del refuerzo por lo cual los materiales compuestos son clasificados de acuerdo a la geometría de éste, el cual puede consistir de hojuelas, partículas o fibras. Los materiales compuestos particulados pueden estar compuestos de partículas u hojuelas y son isotrópicos debido a la distribución aleatoria de las partículas. Las hojuelas tienen una geometría plana y las fibras, las cuales son estructuras largas con una sección transversal pequeña (Soberanis, 2006). En este trabajo se abordarán los materiales reforzados con fibras. Las fibras se caracterizan no solo por su gran relación longitud/diámetro, sino también por su diámetro de un tamaño próximo al de la estructura cristalina (M. Jones, 1984). Para indicar la efectividad de un material se suelen emplear la rigidez específica (relación rigidez/densidad) y la resistencia específica (relación resistencia/densidad). Muchas fibras son mucho más rígidas y fuertes en comparación a la forma monolítica del material.

III.2.1 Láminas

El bloque de construcción básico de un laminado es la lámina, la cual es un conjunto de fibras acomodadas unidireccionalmente o entretejidas en una matriz, formando una superficie plana. Las fibras son el refuerzo de la lámina y actúan como el soporte de la carga, son rígidas y resistentes. Las matrices pueden ser metálicas, orgánicas, cerámicas o de carbono.

En la Figura 6, se muestra una lámina unidireccional y otra entretejida.

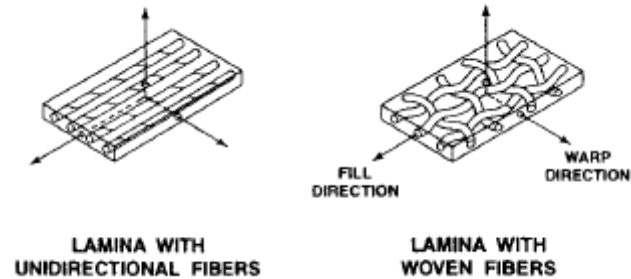


Figura 6. Láminas con fibras unidireccionales y con fibras entretejidas (M. Jones, 1984).

III.2.1.1 Las propiedades de los constituyentes de la lámina

La gráfica de comportamiento esfuerzo-deformación de los constituyentes de la lámina es tipificado por una de las curvas mostradas en la Figura 7. (M. Jones, 1984). La primera curva esfuerzo-deformación mostrada en esta figura es la de un material perfectamente elástico (recupera su forma original tras retirar el esfuerzo y presenta una relación lineal entre esfuerzo y deformación). La segunda es la de un material perfectamente plástico el cual, recupera su forma original tras retirar el esfuerzo sí es sometido a niveles de esfuerzo inferiores al esfuerzo de cedencia o fluencia (también conocido como límite elástico) pero una vez que éste es alcanzado, se generan deformaciones plásticas y el material no recupera su forma original tras retirar el esfuerzo. La tercera curva es la de un material elástico-plástico con endurecimiento (el esfuerzo de cedencia aumenta una vez que se rebasa el esfuerzo de cedencia inicial). La cuarta imagen corresponde al diagrama típico de un material viscoelástico, el cual presenta un comportamiento dependiente de la velocidad de deformación: a mayor velocidad mayor esfuerzo es requerido.

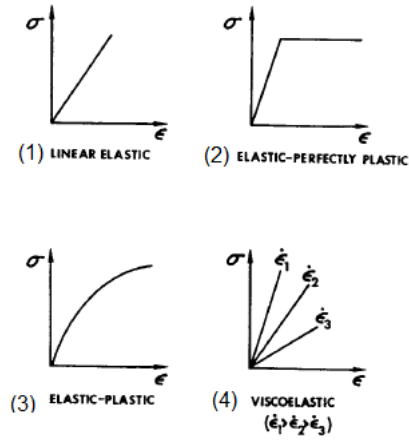


Figura 7. Tipos de diagrama esfuerzo-deformación para los constituyentes de una lámina (M. Jones, 1984).

Las matrices de resina termofija curada (endurecida) muestran un comportamiento viscoelástico o viscoplástico; mientras que las fibras de grafito o boro epoxy son tratadas como materiales elástico-lineales, por lo que las fibras proveen la mayor parte de la resistencia y rigidez (M. Jones, 1984).

III.2.2 Laminado

Un laminado es una unión de láminas con varias orientaciones de direcciones de materiales principales. Las láminas son puestas juntas con el mismo material que se usó como matriz para unir las fibras de las láminas individuales. Las láminas pueden componerse con placas de diferentes materiales o, en este caso, de láminas reforzadas con fibras (M. Jones, 1984). En la Figura 8, se muestran las láminas que son acomodadas en diferentes direcciones en el laminado.

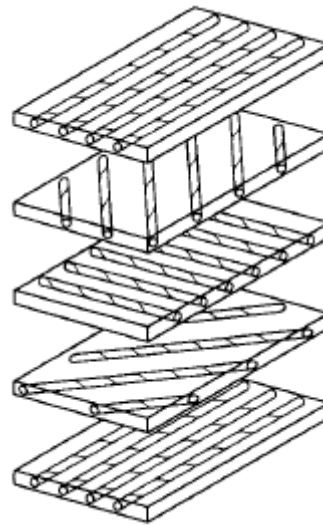


Figura 8. Estructura de un laminado (Besednjak, 2009).



Los laminados se clasifican en los siguientes tipos:

- Laminado angular. Éste se conforma por láminas unidireccionales con ángulos repetidos entre sí en toda la sección. (Miravete, 2020)
- Laminado cruzado. Éste está compuesto de láminas unidireccionales a 0 y 90 grados respecto al eje longitudinal
- Laminado simétrico. Es aquél cuyas propiedades tanto de la geometría como del material son iguales respecto a la superficie media (M. Jones, 1984).
- Laminado antisimétrico. Son aquellos cuyas propiedades geométricas (espesor) son las mismas, pero la orientación de los mismos es a modo de espejo, es decir los ángulos son opuestos.

III.2.3 Materiales compuestos avanzados

Los materiales compuestos avanzados se caracterizan por tener rigidez y resistencia altas en relación a su densidad. Una de las mejores maneras de expresar la efectividad de un material es relacionando la rigidez y la resistencia con la densidad. La rigidez y la resistencia del material se suelen expresar en términos relativos dividiendo cada uno entre la densidad. Los cocientes resistencia-densidad (resistencia específica) y rigidez-densidad (rigidez específica) son útiles para seleccionar materiales con un peso deseado según el diseño. Las fibras usadas en materiales compuestos avanzados son de alta resistencia y rigidez, pero la matriz tiene resistencia y rigidez bajas. Éstas son combinadas para formar láminas unidireccionalmente reforzadas. Un laminado es la unión de una variedad de láminas puestas angularmente, cuya resistencia y rigidez no son ni tan altas como las de las láminas con ángulo de 0° ni tan bajas como las de las láminas unidas con las direcciones principales a 90° (M. Jones, 1984).

III.3 Mecánica de materiales compuestos y placas laminadas

III.3.1 Homogenización de propiedades mecánicas (propiedades efectivas)

La homogeneización comprende los métodos que permiten predecir las propiedades efectivas de un material compuesto, uno de ellos es la ley de mezclas.

El módulo de Young E_L puede obtenerse mediante la fórmula de la ley de mezclas (M. Jones, 1984):

$$E_L = E_f V_f + E_m V_m \quad (29)$$

Donde

E_f = Módulo de rigidez del material de las fibras



E_m = Módulo de rigidez del material de la matriz

Las fracciones volumétricas están definidas por::

$$V_f = \frac{A_f}{A} \quad (30)$$

$$V_m = \frac{A_m}{A} \quad (31)$$

siendo A = Sección transversal total, A_f = Sección transversal de la fibra y A_m = Sección transversal de la matriz.

El módulo de elasticidad en la dirección T se determina como sigue

$$E_T = \frac{E_1 E'_m}{V_f E'_m + V_m E_f (1 - V_m^2)} \quad (32)$$

donde

$$E'_m = \frac{E_m}{1 - 2V_m^2} \quad (33)$$

III.3.2 Comportamiento de una capa unidireccional

III.3.2.1 Propiedades de un material ortotrópico

A diferencia de los materiales isótropos, en los que sus propiedades son las mismas en todas las direcciones, en un ortotrópico éstas cambian dependiendo de la orientación en que se midan y existen 3 direcciones perpendiculares (llamadas direcciones principales de ortotropía) en las cuales el material presenta simetrías; en este caso, son la dirección de las fibras (dirección L), la dirección perpendicular al plano de la lámina (dirección N) y la dirección perpendicular a las fibras pero paralela al plano de la lámina (dirección T). Las propiedades elásticas en las direcciones de ortotropía son:

E_L, E_T, E_N = Módulos de Young en las direcciones L, T y N, respectivamente

$\nu_{LT}, \nu_{LN}, \nu_{TN}$ = Coeficientes de Poisson

G_{LT}, G_{LN}, G_{TN} = Módulos de cortante

III.3.2.2 Notación ingenieril

Para simplificar la escritura del comportamiento lineal elástico, se definen los vectores de esfuerzo y deformación cuyas componentes se encuentran en la columna “Notación reducida” de la Tabla 1.

Tabla 1. Nomenclaturas para esfuerzos y deformaciones.

Esfuerzos		Deformaciones	
Notación de tensor	Notación reducida	Notación de tensor	Notación reducida
$\sigma_{11} = \sigma_1$	σ_1	$\epsilon_{11} = \epsilon_1$	ϵ_1
$\sigma_{22} = \sigma_2$	σ_2	$\epsilon_{22} = \epsilon_2$	ϵ_2
$\sigma_{33} = \sigma_3$	σ_3	$\epsilon_{33} = \epsilon_3$	ϵ_3
$\tau_{23} = \sigma_{32}$	σ_4	$\gamma_{23} = 2\epsilon_{32}$	ϵ_4
$\tau_{31} = \sigma_{31}$	σ_5	$\gamma_{31} = 2\epsilon_{31}$	ϵ_5
$\tau_{12} = \sigma_{12}$	σ_6	$\gamma_{12} = 2\epsilon_{12}$	ϵ_6

III.3.2.3 Ecuaciones de comportamiento en el sistema de ejes de ortotropía

En el sistema de ejes de ortotropía, la ecuación de comportamiento se escribe:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{22} & R_{23} & 0 & 0 & 0 \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \tag{34}$$

donde la matriz \tilde{R} que aparece es conocida como la matriz de rigideces.

Para un material isotrópico transverso, la ecuación de comportamiento se escribe:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{22} & R_{23} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{23} & R_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (R_{22} - R_{23})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Al despejar el vector de deformaciones, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (36)$$

donde la matriz \tilde{C} definida arriba es la matriz de complianzas en el sistema de ejes de ortotropía. Las componentes de la matriz son $C_{11} = 1/E_L$, $C_{22} = 1/E_T$, $C_{12} = -\nu_{LT}/E_L$, $C_{23} = -\nu_{TN}/E_T$, $C_{55} = 1/G_{LT}$.

III.3.2.4 Ecuaciones de comportamiento en el sistema de ejes global

Considerando ahora un sistema de ejes (x, y, z) donde (x,y) se encuentran en el plano de la lámina y las fibras hacen un ángulo θ respecto al eje x, la ecuación de comportamiento del material ortotrópico se escribe entonces:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (37)$$

donde:

$$S_{11} = \frac{\cos^4 \theta}{E_L} + \frac{\sin^4 \theta}{E_T} + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (38)$$

$$S_{22} = \frac{\sin^4 \theta}{E_L} + \frac{\cos^4 \theta}{E_T} + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (39)$$

$$S_{66} = \frac{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta}{G_{LT}} + 2 \left(2 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + \frac{2\nu_{LT}}{E_L^i} \right) - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (40)$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{LT}}{E_L} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (41)$$

$$S_{16} = \left(2 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin \theta \cos^3 \theta + \left(2 \left(-\frac{1}{E_T} - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) + \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^3 \theta \cos \theta \quad (42)$$

$$S_{26} = \left(2 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^3 \theta \cos \theta + \left(2 \left(-\frac{1}{E_T} - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) + \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin \theta \cos^3 \theta \quad (43)$$

$$S_{13} = -\frac{\nu_{LN}}{E_L} \cos^2 \theta - \frac{\nu_{TN}}{E_T} \sin^2 \theta \quad (44)$$

$$S_{23} = -\frac{\nu_{TN}}{E_T} \cos^2 \theta - \frac{\nu_{LN}}{E_L} \sin^2 \theta \quad (45)$$

$$S_{13} = \frac{1}{E_N} \quad (46)$$

$$S_{44} = \frac{\cos^2 \theta}{G_{TN}} + \frac{\sin^2 \theta}{G_{LN}} \quad (47)$$

$$S_{45} = \cos \theta \sin \theta \left(\frac{1}{G_{LN}} - \frac{1}{G_{TN}} \right) \quad (48)$$

$$S_{55} = \frac{\cos^2 \theta}{G_{LN}} + \frac{\sin^2 \theta}{G_{TN}} \quad (49)$$

III.3.3 Comportamiento del laminado

III.3.3.1 Fuerzas generalizadas

Para un laminado de n capas se consideran las siguientes fuerzas generalizadas (Vasiliev, 2001):

- las fuerzas de membrana (en N/m) son (para α, β enteros iguales a 1 o 2)

$$N_{\alpha\beta}(x, y) = \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz \quad (50)$$

donde la capa número i se encuentra confinada entre $z = h_i^-$ y $z = h_i^+$.

- los momentos en el plano (en N) son

$$M_{\alpha\beta}(x, y) = \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) \times (z - \bar{h}_i) dz + \sum_{i=1}^n \bar{h}_i \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz \quad (51)$$

donde $\bar{h}_i = \frac{h_i^- + h_i^+}{2}$.

- las fuerzas cortantes fuera del plano (en N/m) son:

$$Q_{\alpha}(x, y) = \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}(x, y, z) dz \quad (52)$$

III.3.3.2 Desplazamientos generalizados

Los desplazamientos generalizados son:

- U_x, U_y, U_z = desplazamientos en las direcciones x, y y z en m.
- ϕ_x, ϕ_y = giros respecto al eje x y al eje y, ambos adimensionales.

III.3.3.3 Deformaciones generalizadas

Las deformaciones generalizadas son las siguientes:

- $\epsilon_{\alpha\beta}$ = deformaciones en el plano en m/m definidas por

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x} \quad (53)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial y} \quad (54)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) \quad (55)$$

- $\chi_{\alpha\beta}$ = curvaturas en 1/m definidas por



$$\chi_{11} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \quad (56)$$

$$\chi_{22} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad (57)$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \quad (58)$$

- $d_{\phi\alpha}$ = deformaciones angulares fuera del plano en m/m, definidas a continuación

$$d_{\phi 1} = \phi_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x} \quad (59)$$

$$d_{\phi 2} = \phi_2 + \frac{\partial U_3}{\partial y} \quad (60)$$

donde α y β son las variables.

III.3.3.4 Ecuación de comportamiento y matriz ABDF

Se define el espesor de la capa i :

$$e_i = h_i^+ - h_i^- \quad (61)$$

En la ecuación (62), se definen la matriz de complianzas de la capa i en el plano

$$\tilde{S}^i = \begin{bmatrix} S_{11}^i & S_{12}^i & S_{16}^i \\ S_{21}^i & S_{22}^i & S_{26}^i \\ S_{16}^i & S_{26}^i & S_{66}^i \end{bmatrix} \quad (62)$$

y la matriz de complianzas de la capa i fuera del plano

$$\tilde{S}_Q^i = \begin{bmatrix} S_{Q11}^i & S_{Q12}^i \\ S_{Q12}^i & S_{Q22}^i \end{bmatrix} \quad (63)$$

donde:

$$S_{Q11}^i = \frac{\cos^2 \theta_i}{G_{LN}^i} + \frac{\sin^2 \theta_i}{G_{TN}^i} \quad (64)$$

$$S_{Q22}^i = \frac{\sin^2 \theta_i}{G_{LN}^i} + \frac{\cos^2 \theta_i}{G_{TN}^i} \quad (65)$$

$$S_{Q12}^i = \left(\frac{1}{G_{LN}^i} + \frac{1}{G_{TN}^i} \right) \sin \theta_i \cos \theta_i \quad (66)$$

Después, se definen las matrices de rigidez ABDF como sigue:

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^n e_i (\tilde{S}^i)^{-1} \quad (67)$$

$$\tilde{B} = \sum_{i=1}^n e_i \bar{h}^i (\tilde{S}^i)^{-1} \quad (68)$$

$$\tilde{D} = \sum_{i=1}^n \left(e_i (\bar{h}^i)^2 + \frac{e^3}{12} \right) (\tilde{S}^i)^{-1} \quad (69)$$

$$\tilde{F} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{e_i \tilde{S}_Q^i}{e^2} \right)^{-1} \quad (70)$$

donde e es el espesor total del laminado.

Finalmente, se tiene:

$$\tilde{N} = \tilde{A} \cdot \tilde{\varepsilon} + \tilde{B} \cdot \tilde{\chi} \quad (71)$$

$$\tilde{M} = \tilde{B} \cdot \tilde{\varepsilon} + \tilde{D} \cdot \tilde{\chi} \quad (72)$$

$$\tilde{Q} = \tilde{F} \cdot \tilde{d} \quad (73)$$

En los puntos anteriores se abordaron desplazamientos, deformaciones y fuerzas generalizadas en el laminado. A continuación, se mencionará como varían los desplazamientos, deformaciones, fuerzas y esfuerzos en cada capa del laminado.

III.3.3.5 Desplazamientos por capa

Los desplazamientos por capa $U_1^i, U_2^i, U_3^i, \varphi_1^i, \varphi_2^i$ se calculan como sigue:

$$U_1^i = U_1 + \bar{h}_i \times \varphi_1^i \quad (74)$$

$$U_2^i = U_2 + \bar{h}_i \times \varphi_2^i \quad (75)$$

$$U_3^i = U_3 \quad (76)$$

$$\varphi_1^i = \varphi_1 \quad (77)$$

$$\varphi_2^i = \varphi_2 \quad (78)$$

III.3.3.6 Deformaciones por capa

Las deformaciones por capa $\varepsilon_{\alpha\beta}^i, \chi_{\alpha\beta}^i$ y $d_{\varphi\alpha}^i$ se calculan como sigue:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \varepsilon_{\alpha\beta} + \bar{h}_i \times \chi_{\alpha\beta}^i \quad (79)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^i = \chi_{\alpha\beta} \quad (80)$$

$$d_{\varphi\alpha}^i = d_{\varphi\alpha} \quad (81)$$

donde i es el número de capa, α y β pueden tomar valores de 1 y 2.

III.3.3.7 Fuerzas por capa

Las fuerzas generalizadas \bar{N}^i, \bar{M}^i y \bar{Q}^i se calculan como sigue:

$$\bar{N}^i = \begin{pmatrix} N_{11}^i \\ N_{22}^i \\ N_{12}^i \end{pmatrix} = e^i \left[(\tilde{S}^i)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^i \\ \varepsilon_{22}^i \\ 2\varepsilon_{12}^i \end{pmatrix} \right] \quad (82)$$

$$\bar{M}^i = \begin{pmatrix} M_{11}^i \\ M_{22}^i \\ M_{12}^i \end{pmatrix} = \frac{(e^i)^3}{12} \left[(\tilde{S}^i)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \chi_{11}^i \\ \chi_{22}^i \\ 2\chi_{12}^i \end{pmatrix} \right] \quad (83)$$

$$\bar{Q}^i = \begin{pmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \end{pmatrix} = e^i \left[(\tilde{S}_Q^i)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d_1^i \\ d_2^i \end{pmatrix} \right] \quad (84)$$

III.3.3.8 Esfuerzos por capa

Los esfuerzos por capa son los siguientes:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{i, TOP} = \frac{1}{e^i} N_{\alpha\beta}^i + \frac{6}{(e^i)^2} M_{\alpha\beta}^i \quad (85)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{i, MIDDLE} = \frac{1}{e^i} N_{\alpha\beta}^i \quad (86)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{i, BOTTOM} = \frac{1}{e^i} N_{\alpha\beta}^i - \frac{6}{(e^i)^2} M_{\alpha\beta}^i \quad (87)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^i = \frac{1}{e^i} (Q_\alpha - R_{M\alpha}^i) + R_\alpha^i + \frac{R_{M\alpha}^i}{e^i} - R_{N\alpha}^i P_1^i(z) + \frac{R_{M\alpha}^i}{e^i} P_2^i(z) \quad (88)$$

donde $R_{M\alpha}^i$, R_α^i y $R_{N\alpha}^i$ dependen de las derivadas parciales de las fuerzas generalizadas $N_{\alpha\beta}$ y $M_{\alpha\beta}$; $P_1^i(z)$ y $P_2^i(z)$ dependen de la posición z en el laminado.

III.3.3.9 Elementos finitos

Para este proyecto se empleará el método de elementos finitos, el cual es un procedimiento que permite dar soluciones numéricas a un problema de ciertos valores en las fronteras de un dominio o cuerpo, el cual se divide en subdominios o elementos finitos. De acuerdo a los valores aplicados en las fronteras, por medio de interpolación, se obtienen valores aproximados en los subdominios (Dominguez, 2015). El método de elementos finitos permite visualizar el efecto de un fenómeno sobre las diferentes partes del dominio.

Debido a que no siempre se puede abarcar una realidad como un todo a la hora de estudiarla, como se menciona en la fuente (Zienkiewicz, 1981), es necesario separar ésta en partes o elementos, los cuales sí pueden ser analizados. A esta separación en elementos se le conoce como discretización (Zienkiewicz, 1981). En muchos casos los problemas sólo pueden resolverse mediante procesos matemáticos de infinitésimos, a éstos se les conoce como continuos. (Zienkiewicz, 1981) Estos problemas, por su gran extensión, suelen requerir del uso de computadoras. Dado que las computadoras no poseen muchas veces la capacidad para resolver problemas continuos, éstas requieren de manipulaciones matemáticas para poderlos resolver. Las manipulaciones matemáticas suelen limitarse a casos extremadamente simplificados, debido a esto, se han propuesto diferentes métodos de discretización, de modo que a medida que aumente el número de discretizaciones, los

resultados obtenidos se aproximen cada vez más a los valores reales. Los ingenieros abordan estos problemas usando analogías entre elementos finitos reales y aquellos obtenidos a partir de la discretización de un dominio.

En cada elemento se hace una interpolación de la solución mediante polinomios de las variables de espacio. Supongamos que tenemos un solo campo incógnita S a determinar.

Comencemos haciendo una aproximación con polinomios de grado 1. En el elemento triangular número i de vértices A, B y C mostrado en la Figura 9, se propone la siguiente aproximación

$$S = a_i + b_i x + c_i y \quad (89)$$

donde a_i , b_i y c_i deben ser determinados. Para esto, se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$S_A = a_i + b_i x_A + c_i y_A \quad (90)$$

$$S_B = a_i + b_i x_B + c_i y_B \quad (91)$$

$$S_C = a_i + b_i x_C + c_i y_C \quad (92)$$

donde S_A , S_B , S_C son los valores de la solución en los nodos A, B y C, respectivamente.

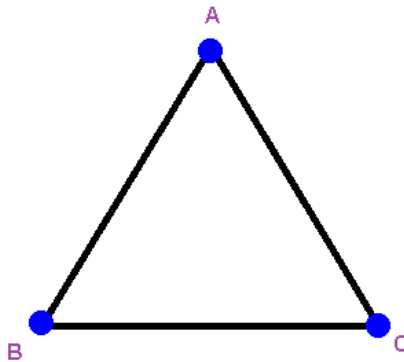


Figura 9. Elemento triangular para ecuaciones de grado 1 (Cardona & Fachimotti, 2019).

Para una aproximación con polinomios de grado 2:

$$S = a_i + b_i x + c_i y + d_i x^2 + e_i xy + f_i y^2 \quad (93)$$

se requieren seis coeficientes y, por lo tanto, tres nodos adicionales a los vértices (Ver Figura 10).

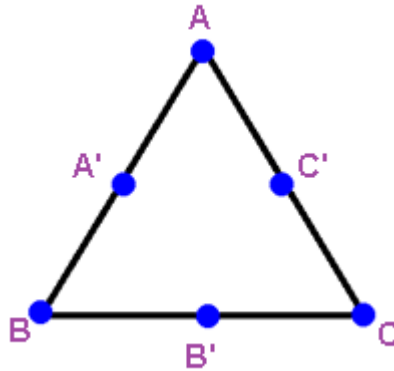


Figura 10. Elemento triangular para ecuaciones de grado 2 (Cardona & Fachimotti, 2019).

Para una aproximación con polinomios de grado 3:

$$S = a_i + b_i x + c_i y + d_i x^2 + e_i xy + f_i y^2 + g_i x^3 + h_i x^2 y + l_i xy^2 + m_i y^3 \quad (94)$$

se requieren 10 coeficientes y, por lo tanto, siete nodos adicionales a los vértices (Ver Figura 11).

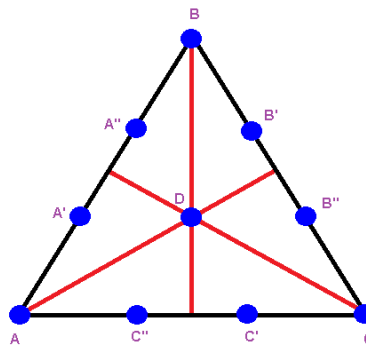


Figura 11. Elemento triangular para ecuaciones de grado 3 (Cardona & Fachimotti, 2019).



IV. Antecedentes

IV.1 Programas para análisis de materiales compuestos

Existen software que permiten la programación de modelos matemáticos, incluyendo el modelo de elementos finitos, para predecir el comportamiento de estructuras tales como placas laminadas. Uno de estos programas es COMSOL Multiphysics, que emplea el método de elementos finitos. Sin embargo, estos programas suelen ser muy costosos; COMSOL Multiphysics (módulos COMSOL, de mecánica estructural y de materiales compuestos) cuesta 3,985 dólares la licencia perpetua con propósitos educativos (para una sola PC) y 17,985 dólares la versión empresarial con fines de lucro.

En CIMAV se han desarrollado software que permiten el análisis de rigideces, esfuerzos y deformaciones en placas laminadas, pero sin el método de elementos finitos, entre ellos está el MAC LAM, el cual es gratuito (Díaz, et. el, 2004). También se han desarrollado software para emplear el método de elementos finitos, pero no aplicables a placas laminadas, un ejemplo es el software SEDEF (Domínguez, 2015). MACLAM consta de los siguientes módulos, los cuales se mencionan en (Islas, 2019):

- Micromecánica: Permite determinar las propiedades de materiales compuestos con fibra unidireccional. Utiliza fórmulas de modelos empíricos y semiempíricos.
- Placas multicapa: Predice las propiedades de un laminado hecho de capas de distintos materiales, siempre y cuando sean ortotrópicos.
- DEILAM: Permite calcular los efectos de borde sobre los esfuerzos de interfaz entre cada capa.

El digimat-Fe es un software que permite computar el comportamiento de los materiales compuestos. Este software permite definir la microestructura del material para luego realizar los cálculos por medio del método de elementos finitos (e-Xstream engineering). Este programa, mencionado en (Islas, 2019), utiliza el método de homogeneización del campo medio unido al de elementos finitos. En el año 2015, salió un software conocido como SwiftComp, el cual trabaja con el método asintótico vibracional basado en elementos finitos y permite calcular varias propiedades de materiales, entre las que se incluyen las elásticas. Una herramienta de acceso gratuito es cedemhub, la cual posee aplicaciones web para el cálculo de materiales compuestos, cuyos métodos incluyen la homogeneización, pero en este caso no se indica que método de análisis utiliza. Existen otras aplicaciones que se pueden acoplar con Python y ABAQUS para determinar las propiedades elásticas de los materiales compuestos; pero su costo computacional es mayor debido a que utilizan el análisis 3D. FiberSIM es un software que permite el análisis y el diseño de materiales compuestos permitiendo trabajar con diferentes combinaciones de materiales y con variadas orientaciones de los mismos, además de elegir si el material compuesto será o no simétrico. (structures.aero) Multiscale Designer

es una herramienta que permite el modelado de materiales compuestos, también permite el cálculo de esfuerzos últimos (Altair).

AIM es un software gratuito y fácil de usar, que permite calcular la rigidez y la resistencia de materiales compuestos conformados por fibras largas o cortas y matrices. Este software permite el análisis con dos materiales compuestos distintos, como se ve en la Figura 12 (KU LEUVEN).

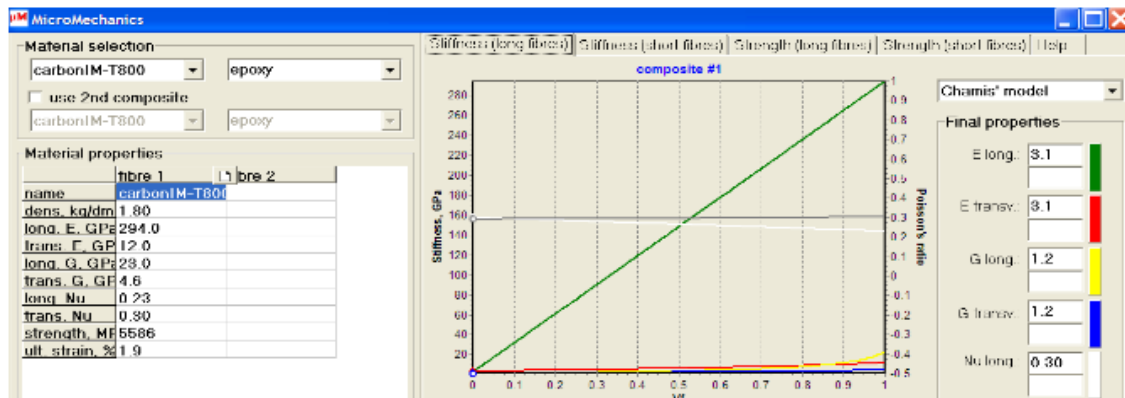


Figura 12. Ventana de AIM.

Thelaminator es un programa que permite el análisis de materiales compuestos mediante los procedimientos descritos en la teoría clásica de laminados, tomando en cuenta las propiedades mecánicas del material y su orientación bajo ciertas condiciones de deformación y de temperatura. Este software tiene una licencia que cuesta 29 dolares. Permite el cálculo de las matrices de rigidez A, B, D, las propiedades aparentes del material compuesto, las complianzas del laminado, etc.

SMARTree tiene una opción de homogeneización de materiales compuestos, asumiendo lo siguiente:

- las fibras están distribuidas uniformemente en la matriz.
- la matriz no tiene poros.
- las cargas son paralelas o normales a las fibras.
- al inicio las fibras están libres de esfuerzos.
- las fibras y la matriz son elásticas.

Los datos que se incluyen son las propiedades de la fibra y la matriz y la fracción volumétrica. Las propiedades que se obtienen son E_1 , E_2 , ν_{12} y G_{12} .

Un software de paga llamado COMPOSITESTAR calcula las propiedades de materiales isotrópicos y anisotrópicos mediante la teoría clásica de laminados, los resultados que obtiene son:

- Densidad.

- Espesor.
- Matrices de complianzas.
- Módulo de Young.
- Módulo de cortante.
- Relación de Poisson.
- Coeficientes de expansión térmica e higroscópica.

También permite calcular condiciones de falla tales como el esfuerzo máximo resistente y la deformación máxima (CompositesWorld).

IV.2 Fórmulas de homogeneización

Los primeros trabajos, mencionados en (Yvonnet, 2019), relacionados a la homogeneización computacional que se basan en la simulación numérica para poder calcular la solución a escala microscópica, además de evaluar la solución macroscópica; estos trabajos corresponden a Adams y Doner a finales de los 60s. En base a este trabajo, Suquet formuló el problema de homogeneización empleando el método de elementos finitos en 1987.

A continuación se describen algunos métodos de homogeneización:

IV.2.1 Modelo de Bridgin

Es un modelo nuevo para determinar las propiedades de un material compuesto unidireccional. La matriz y las fibras poseen un comportamiento elástico lineal, las cuales se pueden calcular con las ecuaciones (95) a (99), como se menciona en (Islas, 2019):

$$E_1 = V_f E_1^f + V_m E_m \quad (95)$$

$$E_2 = \frac{(V_f + V_m a_{11})(V_f + V_m a_{22})}{(V_f + V_m a_{11})(V_f S_{11}^f + V_m a_{22} S_{22}^m) + V_f V_m (S_{21}^m - S_{21}^f) a_{12}} \quad (96)$$

$$\nu_{12} = V_f \nu_{12}^f + V_m \nu_m \quad (97)$$

$$G_{12} = \frac{(V_f + V_m a_{66}) G_{12}^f G_m}{V_f G_m + V_m a_{66} G_{12}^f} \quad (98)$$

$$G_{23} = \frac{0.5(V_f + V_m a_{44})}{V_f (S_{22}^f - S_{23}^f) + V_m a_{44} (S_{22}^m - S_{23}^m)} \quad (99)$$

Donde:

a_{ij} = Componentes de la matriz Bridgin A

S_{ij}^f = Componentes de la matriz de complianzas S

IV.2.2 Modelos semiempíricos

Estos métodos se usan para mejorar los métodos empíricos mediante factores de corrección. Algunos métodos semiempíricos son:

IV.2.2.1 Ley de mezclas modificada

En este método el módulo de elasticidad E_2 se determina como sigue:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{\eta^f v^f}{E_2^f} + \frac{\eta^m v^m}{E^m} \quad (100)$$

Dónde:

$$\eta^f = \frac{E(v^f + [(1 - \nu_{12})E^m + \nu^m v_{21}^f E_1^f])}{E_1^f v^f + E^m v^m} \quad (101)$$

$$\eta^m = \frac{[(1 - \nu^m)E_1^f - (1 - \nu^m v_{12}^f)E^m]v^f + E^m v^m}{E_1^f v^f + E^m v^m} \quad (102)$$

El módulo de elasticidad al cortante se obtiene como sigue.

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{\frac{v^f}{G_{12}^f} + \frac{\eta^f v^m}{G^m}}{v^f + \eta^f v^m} \quad (103)$$

Dónde:

$$0 < \eta' < 1$$

El valor de η' debe ser estimado de forma experimental y depende de la fracción volumétrica.

IV.2.2.2 Modelo de Halpin-Tsai

Las aproximaciones para el módulo de Young E_1 y el coeficiente de Poisson ν_{12} son las mismas que para la ley de mezclas, en los casos del módulo de elasticidad E_2 y el módulo de rigidez al cortante G_{12} son:

$$E_2 = E^m \frac{1 + \zeta \eta v^f}{1 - \eta v^f} \quad (104)$$

$$G_{12} = G^m \frac{1 + \zeta \eta v^f}{1 - \eta v^f} \quad (105)$$

El valor de ζ es una medida en el refuerzo del material compuesto que depende de la geometría de las fibras, geometría de empaquetamiento y de carga. En (M. Jones, 1984) se le da un valor de 2. Mientras que η' se calcula como sigue:

$$\eta' = \frac{\frac{M_f}{M_m} - 1}{\frac{M_f}{M_m} + \zeta} \quad (106)$$

IV.2.2.3 Método de Chamis

Este método permite obtener E_1 y ν_{12} con el mismo procedimiento que la ley de mezclas, además es el método más usado y confiable para predecir las propiedades de un material compuesto unidireccional. Las fórmulas son las siguientes:

$$E_2 = \frac{E^m}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{E^m}{E_2^f}\right)} \quad (107)$$

$$G_{12} = \frac{G^m}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{G^m}{G_{12}^f}\right)} \quad (108)$$

$$G_{23} = \frac{G^m}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{G^m}{G_{23}^f}\right)} \quad (109)$$

IV.2.2.4 Método de Mori-Tanaka

Este método se usa para diferentes tipos de materiales. Este método considera las fibras como si fueran parte de un material homogéneo. Su desventaja es la complejidad de sus procesos matemáticos. Este método tiene varias modalidades, entre las que se incluye la de Benveniste, la cual se muestra a continuación.

$$C = C_m + [V_f 8C_f - C_m] A_8 [V_m I + V_f A_8]^{-1} \quad (110)$$

Dónde:

C = Matriz de rigidez del MCU (Material compuesto unidireccional)

C_m, C_f = Matrices de rigidez de la matriz y la fibra

A_8 = Tensor de concentración de deformación unitaria en la mezcla y se calcula de la siguiente manera

$$A_8 = [I + EC_m^{-1}(C_f - C_m)]^{-1} \quad (111)$$

Dónde:



I = Matriz identidad

E = Tensor de Eshelby, que depende de la forma del material de refuerzo y de la relación de Poisson de la matriz

V. Materiales y métodos

En este trabajo se empleó el software SCILAB con el fin de programar lo necesario para hacer análisis estructural de placas laminadas empleando el método de elementos finitos. Las actividades realizadas fueron:

1. Capacitación en programación, métodos numéricos y materiales compuestos.
2. Escritura y comprensión de las ecuaciones que deberá resolver el método numérico.
3. Adaptación del programa de elementos finitos desarrollado en CIMAV para llevar a cabo el análisis de placas laminadas.
4. Algoritmos y programación de condiciones de frontera y propiedades de materiales, así como visualizar resultados numéricos mediante mapas de colores.
5. Validación del software creado mediante la confrontación con resultados del software comercial COMSOL Multiphysics.

V.1 Ecuaciones que deberá resolver el método numérico

Para el cálculo estructural de placas laminadas se requiere la resolución de las ecuaciones de equilibrio por medio de elementos finitos. Las ecuaciones de equilibrio en el modelo de placas laminadas son:

$$\widetilde{div} \widetilde{N} + \widetilde{T}^+ + \widetilde{T}^- = \widetilde{0} \quad (112)$$

$$\widetilde{div} \widetilde{M} - \widetilde{Q} + \frac{e}{2}(\widetilde{T}^+ - \widetilde{T}^-) = \widetilde{0} \quad (113)$$

$$div \widetilde{Q} + \widetilde{T}_3^+ + \widetilde{T}_3^- = 0 \quad (114)$$

Donde:

$$T^+ = \begin{pmatrix} T_1^+ \\ T_2^+ \end{pmatrix} = \text{Fuerzas en la parte superior del laminado en las direcciones 1 y 2 en Pa}$$

$$T^- = \begin{pmatrix} T_1^- \\ T_2^- \end{pmatrix} = \text{Fuerzas en la parte inferior del laminado en las direcciones 1 y 2 en Pa}$$

$$T_3^+ = \text{Fuerzas en la parte superior del laminado en la dirección perpendicular al plano en Pa}$$

$$T_3^- = \text{Fuerzas en la parte inferior del laminado en la dirección perpendicular al plano en Pa}$$

donde las componentes de N , M y Q están dadas por las ecuaciones de comportamiento:

$$N_{11} = A_{11}\epsilon_{11} + A_{12}\epsilon_{22} + 2A_{13}\epsilon_{12} + B_{11}\chi_{11} + B_{12}\chi_{22} + 2B_{13}\chi_{12} \quad (115)$$

$$N_{12} = A_{31}\epsilon_{11} + A_{32}\epsilon_{22} + 2A_{33}\epsilon_{12} + B_{31}\chi_{11} + B_{32}\chi_{22} + 2B_{33}\chi_{12} \quad (116)$$

$$N_{22} = A_{21}\epsilon_{11} + A_{22}\epsilon_{22} + 2A_{23}\epsilon_{12} + B_{21}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22} + 2B_{23}\chi_{12} \quad (117)$$

$$M_{11} = B_{11}\epsilon_{11} + B_{12}\epsilon_{22} + 2B_{13}\epsilon_{12} + D_{11}\chi_{11} + D_{12}\chi_{22} + 2D_{13}\chi_{12} \quad (118)$$

$$M_{12} = B_{31}\epsilon_{11} + B_{32}\epsilon_{22} + 2B_{33}\epsilon_{12} + D_{31}\chi_{11} + D_{32}\chi_{22} + 2D_{33}\chi_{12} \quad (119)$$

$$M_{22} = B_{21}\epsilon_{11} + B_{22}\epsilon_{22} + 2B_{23}\epsilon_{12} + D_{21}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22} + 2D_{23}\chi_{12} \quad (120)$$

$$Q_1 = F_{11}d_{\phi 1} + F_{12}d_{\phi 2} \quad (121)$$

$$Q_2 = F_{21}d_{\phi 1} + F_{22}d_{\phi 2} \quad (122)$$

Las deformaciones generalizadas son:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x} \quad (123)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial y} \quad (124)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) \quad (125)$$

$$\chi_{11} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \quad (126)$$

$$\chi_{22} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad (127)$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \quad (128)$$

$$d_{\phi 1} = \phi_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x} \quad (129)$$

$$d_{\phi_2} = \phi_2 + \frac{\partial U_3}{\partial y} \quad (130)$$

Se definen

$$U_4 = h\phi_1 \quad (131)$$

$$U_5 = h\phi_2 \quad (132)$$

De esta forma, al sustituir en las ecuaciones de comportamiento, se obtiene:

$$N_{11} = A_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial U_2}{\partial y} + A_{13} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) + \frac{B_{11}}{h} \frac{\partial U_4}{\partial x} + \frac{B_{12}}{h} \frac{\partial U_5}{\partial y} + \frac{B_{13}}{h} \left(\frac{\partial U_5}{\partial x} + \frac{\partial U_4}{\partial y} \right) \quad (133)$$

$$N_{12} = A_{31} \frac{\partial U_1}{\partial x} + A_{32} \frac{\partial U_2}{\partial y} + A_{33} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) + \frac{B_{31}}{h} \frac{\partial U_4}{\partial x} + \frac{B_{32}}{h} \frac{\partial U_5}{\partial y} + \frac{B_{33}}{h} \left(\frac{\partial U_5}{\partial x} + \frac{\partial U_4}{\partial y} \right) \quad (134)$$

$$N_{22} = A_{21} \frac{\partial U_1}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial U_2}{\partial y} + A_{23} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) + \frac{B_{21}}{h} \frac{\partial U_4}{\partial x} + \frac{B_{22}}{h} \frac{\partial U_5}{\partial y} + \frac{B_{23}}{h} \left(\frac{\partial U_5}{\partial x} + \frac{\partial U_4}{\partial y} \right) \quad (135)$$

$$M_{11} = B_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial U_2}{\partial y} + B_{13} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) + \frac{D_{11}}{h} \frac{\partial U_4}{\partial x} + \frac{D_{12}}{h} \frac{\partial U_5}{\partial y} + \frac{D_{13}}{h} \left(\frac{\partial U_5}{\partial x} + \frac{\partial U_4}{\partial y} \right) \quad (136)$$

$$M_{12} = B_{31} \frac{\partial U_1}{\partial x} + B_{32} \frac{\partial U_2}{\partial y} + B_{33} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) + \frac{D_{31}}{h} \frac{\partial U_4}{\partial x} + \frac{D_{32}}{h} \frac{\partial U_5}{\partial y} + \frac{D_{33}}{h} \left(\frac{\partial U_5}{\partial x} + \frac{\partial U_4}{\partial y} \right) \quad (137)$$

$$M_{22} = B_{21} \frac{\partial U_1}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial U_2}{\partial y} + B_{23} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) + \frac{D_{21}}{h} \frac{\partial U_4}{\partial x} + \frac{D_{22}}{h} \frac{\partial U_5}{\partial y} + \frac{D_{23}}{h} \left(\frac{\partial U_5}{\partial x} + \frac{\partial U_4}{\partial y} \right) \quad (138)$$

$$Q_1 = F_{11} \left(\frac{1}{h} U_4 + \frac{\partial U_3}{\partial x} \right) + F_{12} \left(\frac{1}{h} U_5 + \frac{\partial U_3}{\partial y} \right) \quad (139)$$

$$Q_2 = F_{21} \left(\frac{1}{h} U_4 + \frac{\partial U_3}{\partial x} \right) + F_{22} \left(\frac{1}{h} U_5 + \frac{\partial U_3}{\partial y} \right) \quad (140)$$

Finalmente, sustituyendo en las ecuaciones de equilibrio se tiene:

$$\begin{aligned} & \left(A_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} + A_{13} \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} \right) + \frac{B_{11}}{h} \frac{\partial^2 U_4}{\partial x^2} + \frac{B_{12}}{h} \frac{\partial^2 U_5}{\partial x \partial y} + \frac{B_{13}}{h} \left(\frac{\partial^2 U_5}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_4}{\partial x \partial y} \right) \right) + \left(A_{31} \frac{\partial U_1}{\partial x \partial y} + \right. \\ & \left. A_{32} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + A_{33} \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U_1}{\partial y^2} \right) + \frac{B_{31}}{h} \frac{\partial^2 U_4}{\partial x \partial y} + \frac{B_{32}}{h} \frac{\partial^2 U_5}{\partial y^2} + \frac{B_{33}}{h} \left(\frac{\partial^2 U_5}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_4}{\partial y^2} \right) \right) + T_1^+ + T_1^- = 0 \quad (141) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (A_{31} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + A_{32} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} + A_{33} (\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y})) + \frac{B_{31}}{h} \frac{\partial^2 U_4}{\partial x^2} + \frac{B_{32}}{h} \frac{\partial^2 U_5}{\partial x \partial y} + \frac{B_{33}}{h} (\frac{\partial^2 U_5}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_4}{\partial x \partial y})) + (A_{21} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} + \\
 & A_{22} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + A_{23} (\frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2})) + \frac{B_{21}}{h} \frac{\partial^2 U_4}{\partial x \partial y} + \frac{B_{22}}{h} \frac{\partial^2 U_5}{\partial y^2} + \frac{B_{23}}{h} (\frac{\partial^2 U_5}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_4}{\partial y^2})) + T_2^+ + T_2^- = 0
 \end{aligned}
 \tag{142}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{h} (B_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} + B_{13} (\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y})) + \frac{D_{11}}{h} \frac{\partial^2 U_4}{\partial x^2} + \frac{D_{12}}{h} \frac{\partial^2 U_5}{\partial x \partial y} + \frac{D_{13}}{h} (\frac{\partial^2 U_5}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_4}{\partial x \partial y})) + \frac{1}{h} (B_{31} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} + \\
 & B_{32} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + B_{33} (\frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2})) + \frac{D_{31}}{h} \frac{\partial^2 U_4}{\partial x \partial y} + \frac{D_{32}}{h} \frac{\partial^2 U_5}{\partial y^2} + \frac{D_{33}}{h} (\frac{\partial^2 U_5}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_4}{\partial y^2})) - \frac{Q_1}{h} + \frac{1}{2} T_1^+ + \frac{1}{2} T_1^- = 0
 \end{aligned}
 \tag{143}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{h} (B_{31} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + B_{32} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} + B_{33} (\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y})) + \frac{D_{31}}{h} \frac{\partial^2 U_4}{\partial x^2} + \frac{D_{32}}{h} \frac{\partial^2 U_5}{\partial x \partial y} + \frac{D_{33}}{h} (\frac{\partial^2 U_5}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_4}{\partial x \partial y})) + \frac{1}{h} (B_{21} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} + \\
 & B_{22} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + B_{23} (\frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2})) + \frac{D_{21}}{h} \frac{\partial^2 U_4}{\partial x \partial y} + \frac{D_{22}}{h} \frac{\partial^2 U_5}{\partial y^2} + \frac{D_{23}}{h} (\frac{\partial^2 U_5}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_4}{\partial y^2})) - \frac{Q_2}{h} + \frac{1}{2} T_2^+ + \frac{1}{2} T_2^- = 0
 \end{aligned}
 \tag{144}$$

$$\begin{aligned}
 & F_{11} (\frac{1}{h} \frac{\partial U_4}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2}) + F_{12} (\frac{1}{h} \frac{\partial U_5}{\partial x} + \frac{\partial U_3}{\partial x \partial y}) + (F_{21} (\frac{1}{h} \frac{\partial U_4}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial x \partial y}) + F_{22} (\frac{1}{h} \frac{\partial U_5}{\partial y} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2})) + T_3^+ + T_3^- = 0
 \end{aligned}
 \tag{145}$$

V.2 Ecuaciones genéricas en COMSOL y el software hecho en SCILAB por CIMAV

La siguiente ecuación se le conoce como ecuación genérica que utiliza COMSOL Multiphysics y el software desarrollado en SCILAB por CIMAV, debido a que puede aplicarse a diferentes problemas matemáticos:

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla u - \alpha u + \gamma) + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = f
 \tag{146}$$

donde:

e_a = Coeficiente de masa

d_a = Coeficiente de masa o amortiguación

c = Coeficiente de difusión

α = Coeficiente de convección del flujo conservativo

γ = Fuente de flujo conservativo



$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{F_{11}}{h} & \frac{F_{12}}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{F_{21}}{h} & \frac{F_{22}}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{F_{21}}{h} & \frac{F_{22}}{h} \end{bmatrix} \quad (150)$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-F_{11}}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f_{12}}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_{21}}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F_{22}}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_{22}}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (151)$$

$$f = \begin{bmatrix} T_1^+ + T_1^- \\ T_2^+ + T_2^- \\ \frac{1}{2}(T_1^+ + T_1^-) \\ \frac{1}{2}(T_2^+ + T_2^-) \\ T_3^+ + T_3^- \end{bmatrix} \quad (152)$$

En SCILAB, las matrices que se tienen que definir son similares a las de COMSOL.

VI. Resultados y discusión

VI.1 Validación

La validación consistió en comparar los resultados obtenidos en SCILAB con los de COMSOL.

Dimensiones del laminado.

Para la validación se emplearán los laminados A, B, C y D. Los laminados tienen una superficie de 1 x 1 m.

En la Figura 13, se muestran los mallados tanto de COMSOL como de SCILAB usado para estos laminados.

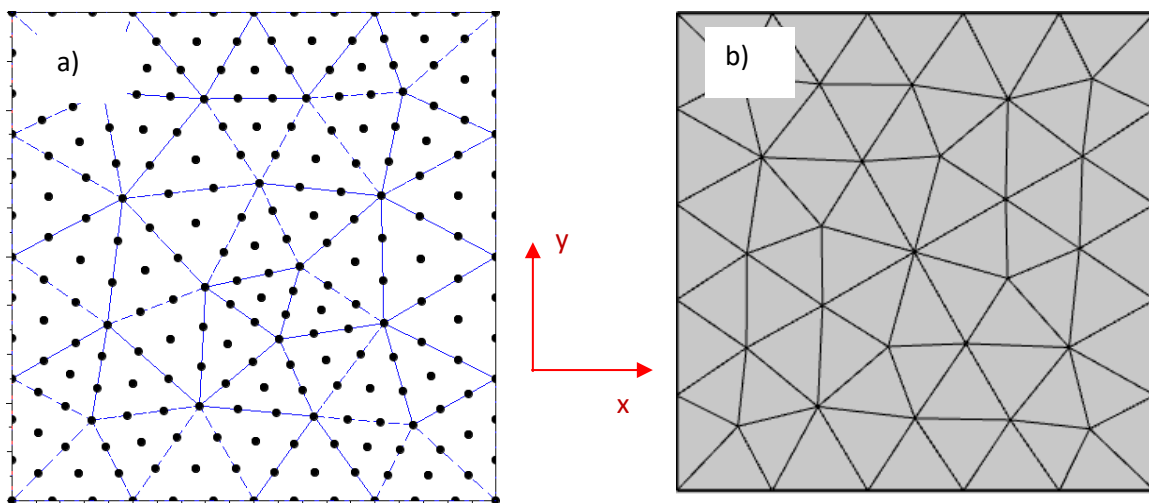


Figura 13. Mallado del laminado con SCILAB (a) y con COMSOL (b).

Los laminados de estudio son:

- **Laminado A:** Este laminado consta de 4 capas de espesor de 3mm cuya matriz es de aluminio y las fibras son de carbono. El ángulo de las fibras se mide respecto al eje de las X. El laminado es un 0_4 .
- **Laminado B:** Este laminado consta también de 4 capas aluminio/carbono (como en el laminado A), de espesor de 3mm, pero esta vez el apilamiento es un $(45, -45)_s$.

- **Laminado C:** Este laminado consta también de las mismas 4 capas que los laminados anteriores, con el mismo espesor, pero el apilamiento es un $(0,90,0,90)$, es decir un apilamiento no simétrico.

- **Laminado D:** En este laminado de 4 capas, la primera capa es de aluminio-carbono (como en el laminado anterior), la segunda tiene fibras de carbono con una matriz epóxica (carbono-epoxy), la tercera tiene una matriz de nylon 6 con fibras de boro, y la cuarta capa tiene una matriz de nylon 6 con fibras de carburo de silicio. La secuencia de apilamiento es $(45, -45, 45, -45)$.

En la Tabla 2, se muestran las propiedades de cada material mencionado arriba.

Tabla 2. Propiedades de los materiales que se usarán para los laminados.

Propiedad\Material	Aluminio-carbono	Carbono-epoxy1	Nylon6-boro	Nylon6-carburo de silicio
E_L (GPa)	106.2	133.24	353.94	360.24
E_T (GPa)	84.0	7.6	22.87	22.89
E_N (GPa)	84.0	7.6	22.87	22.89
ν_{LT}	0.3102	0.2	0.2	0.2
ν_{LN}	0.3102	0.2	0.2	0.2
ν_{TN}	0	0.2	0	0
G_{LT} (GPa)	31.546475	3.17	9.53	9.54
G_{LN} (GPa)	31.546475	3.17	9.53	9.54
G_{TN} (GPa)	43.218338	4.43	12.55	12.56

De acuerdo con la Figura 14, el laminado está empotrado en uno de sus lados, en el lado opuesto al empotrado se aplica la carga.

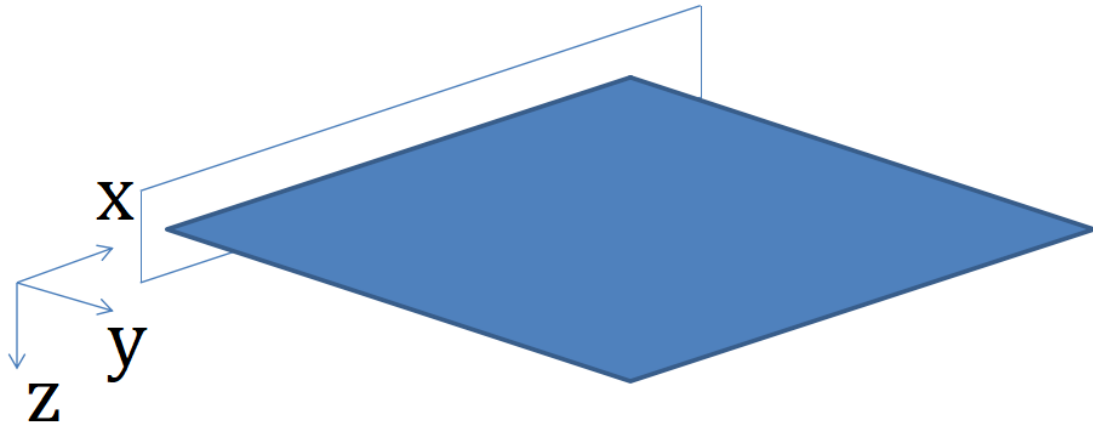


Figura 14. Diagrama del laminado y su respectivo empotramiento.

Cada laminado se analizará bajo las cargas mostradas en la **Figura 15** y son las siguientes:

- a) $N_y = 1\text{ N/m}$
- b) $M_y = 1\text{ N} \cdot \text{m/m}$
- c) $Q = 1\text{ N/m}$

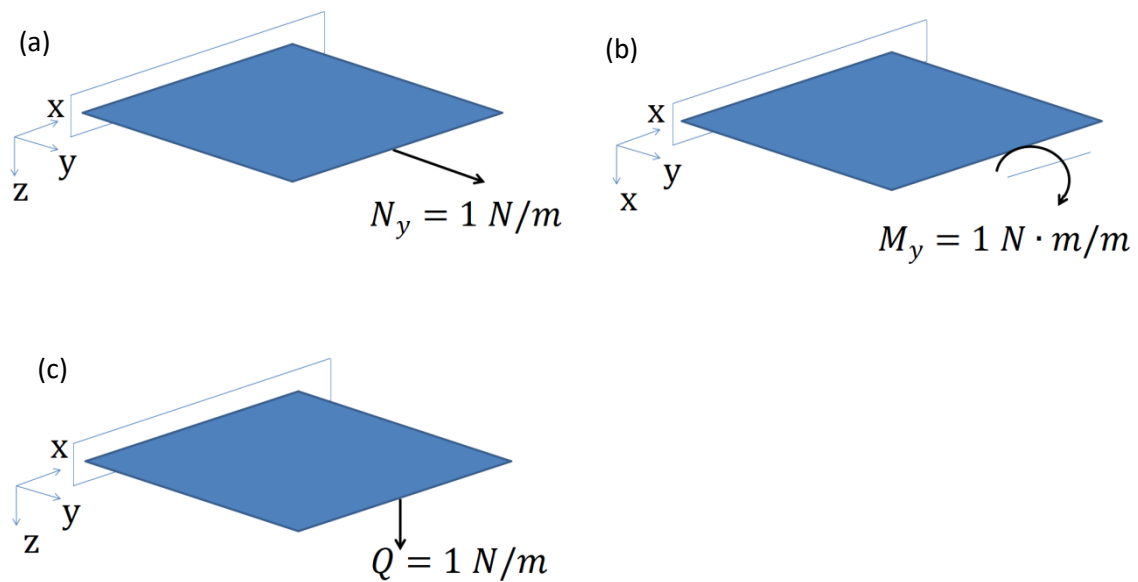


Figura 15. Diagrama del laminado sujeto a la tensión N_y (a), al momento M_y (b), a la fuerza cortante Q (c)



A continuación, se muestran las matrices ABDF para cada laminado, junto con las gráficas de su comportamiento (desplazamientos y giros). El programa en SCILAB y COMSOL usan polinomios de grado 3 en cada elemento, pero en la graficación, COMSOL tiene herramientas de suavizado no implementadas en SCILAB.

VI.1.1 Laminados A y B.

Para estos laminados simétricos, la matriz B es cero. Para el laminado A, las matrices de rigidez ABDF obtenidas con el software SCILAB son:

$A = \begin{bmatrix} 1.38 & 0.34 & 0 \\ 0.34 & 1.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0.38 \end{bmatrix} GPa.m$	$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} GPa.m^2$
$D = \begin{bmatrix} 1.66 \times 10^{-5} & 0.41 \times 10^{-5} & 0 \\ 0.41 \times 10^{-5} & 1.31 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 \times 10^{-5} \end{bmatrix} GPa.m^3$	$F = \begin{bmatrix} 0.38 & 0 \\ 0 & 0.52 \end{bmatrix} GPa.m$

y para el laminado B se obtienen:

$A = \begin{bmatrix} 1.17 & 0.41 & 0 \\ 0.41 & 1.17 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 \end{bmatrix} GPa.m$	$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} GPa.m^2$
$D = \begin{bmatrix} 1.40 \times 10^{-5} & 0.49 \times 10^{-5} & 0.07 \times 10^{-5} \\ 0.49 \times 10^{-5} & 1.40 \times 10^{-5} & 0.07 \times 10^{-5} \\ 0.07 \times 10^{-5} & 0.07 \times 10^{-5} & 0.54 \times 10^{-5} \end{bmatrix} GPa.m^3$	$F = \begin{bmatrix} 0.44 & 0 \\ 0 & 0.44 \end{bmatrix} GPa.m$

Cabe resaltar que los resultados obtenidos para estas matrices con el software MAC LAM son idénticos.

VI.1.1.1 Tensión N_y

Los desplazamientos U_x en los laminados A y B se muestran en la Tabla 3. Se aprecia que el valor absoluto de estos desplazamientos incrementa a medida que uno se aleja del empotramiento, el cual los bloquea, y su signo cambia de izquierda a derecha debido al efecto Poisson producido por la tensión N_y . Los resultados obtenidos en SCILAB y en COMSOL, son prácticamente iguales. Para el laminado A se obtuvo un rango de -12×10^{-11} a 12×10^{-11} m en COMSOL y SCILAB, para el laminado B en ambos programas se obtuvo de -18×10^{-11} a 18×10^{-11} m.

Tabla 3. Desplazamientos U_x en **m** en los laminados A y B causados por una carga N_y y calculados con COMSOL y SCILAB.

Laminado	Resultados en COMSOL	Resultados en SCILAB
A		
B		

Los desplazamientos U_y debidos a N_y disminuyen en valor absoluto al estar más cerca del empotramiento debido a que éste restringe la libertad del laminado para moverse (ver Tabla 4). Tanto para el laminado A como el B, las gráficas de COMSOL y SCILAB son idénticas, pues para el laminado A, tanto en COMSOL como en SCILAB se obtuvo un rango de valores de 0 a 9.6×10^{-10} m y para el laminado B se obtuvieron de 0 a 9.5×10^{-10} .

Tabla 4. Desplazamientos U_y en **m** en los laminados A y B causados por una carga N_y y calculados con COMSOL y SCILAB.

Laminado	Resultados en COMSOL	Resultados en SCILAB
A		
B		

VI.1.1.2 Flexión M_y

Los desplazamientos en la dirección z producidos por el momento M_y aumentan en valor absoluto a mayor distancia del empotramiento debido a que el empotramiento le impide desplazarse verticalmente (ver **Error! La autoreferencia al marcador no es válida.**). Los resultados obtenidos en SCILAB y en COMSOL coinciden en sus rangos de valores: Los valores de U_z para el laminado A, en COMSOL y SCILAB van de -40×10^{-6} a 0 m y para el laminado B se tiene ese mismo rango.

Tabla 5. Desplazamientos U_z en **m** en los laminados A y B causados por una carga M_y y calculados con COMSOL y SCILAB.

Laminado	Resultados en COMSOL	Resultados en SCILAB
A		
B		

En la Tabla 6 se aprecia que los giros ϕ_y de los laminados A y B incrementan su valor absoluto conforme nos alejamos del empotramiento. Nuevamente, los resultados obtenidos en SCILAB son prácticamente idénticos a los de COMSOL. Para el laminado A el valor mínimo alcanzado es de 0 rad y el máximo es de 8×10^{-5} rad, mientras que para el B los valores varían de 0 a 7.6×10^{-5} rad en ambos programas.

Tabla 6. Rotaciones ϕ_y en **rad** en los laminados A y B causados por una carga M_y y calculados con COMSOL y SCILAB.

Laminado	Resultados en COMSOL	Resultados en SCILAB
A		
B		

VI.1.1.3 Fuerza cortante Q

El desplazamiento en z incrementa su valor absoluto en el extremo libre, pues el empotramiento mantiene el laminado en su posición. (Ver Tabla 7). Los resultados en SCILAB son iguales a los de COMSOL, pues en el laminado A se tiene un rango de 0 a 25×10^{-6} m y en el B se tienen también esos valores en ambos programas.

Tabla 7. Desplazamientos U_z en **m** en los laminados A y B causados por una carga Q y calculados con COMSOL y SCILAB.

Laminado	Resultados en COMSOL	Resultados en SCILAB
A		
B		

A mayor lejanía del empotramiento en los laminados A y B habrá mayor valor absoluto del giro ϕ_y producido por la fuerza cortante Q (ver Tabla 8). Los resultados obtenidos en SCILAB y en COMSOL, coinciden perfectamente. Siendo, para el laminado A el rango de valores de -40×10^{-6} a 0 rad y para el laminado B de -38×10^{-6} a 0 rad en COMSOL y SCILAB.

Tabla 8. Rotaciones ϕ_y en **rad** en los laminados A y B causados por una carga Q y calculados con COMSOL y SCILAB.

Laminado	Resultados en COMSOL	Resultados en SCILAB
A		
B		

VI.1.2 Laminados C y D.

Para estos laminados no simétricos, la matriz B es diferente de cero. Para el laminado C, las matrices de rigidez ABDF obtenidas con el software SCILAB son:

$$\begin{array}{l}
 A = \begin{bmatrix} 1.24 & 0.34 & 0 \\ 0.34 & 1.24 & 0 \\ 0 & 0 & 0.38 \end{bmatrix} GPa.m \\
 \\
 D = \begin{bmatrix} 1.48 \times 10^{-5} & 0.41 \times 10^{-5} & 0 \\ 0.41 \times 10^{-5} & 1.5 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 \times 10^{-5} \end{bmatrix} GPa.m^3 \\
 \\
 B = \begin{bmatrix} -2.16 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & -2.16 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} GPa.m^2 \\
 \\
 F = \begin{bmatrix} 0.44 & 0 \\ 0 & 0.44 \end{bmatrix} GPa.m
 \end{array}$$



y para el laminado D se obtienen:

$$\begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 1.05 & 0.73 & -0.08 \\ 0.73 & 1.05 & -0.08 \\ -0.08 & -0.08 & 0.77 \end{bmatrix} \text{GPa}\cdot\text{m} \\ \hline D = \begin{bmatrix} 1.4 \times 10^{-5} & 0.88 \times 10^{-5} & -0.45 \times 10^{-5} \\ 0.88 \times 10^{-5} & 1.4 \times 10^{-5} & -0.45 \times 10^{-5} \\ -0.45 \times 10^{-5} & -0.45 \times 10^{-5} & 0.94 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \text{GPa}\cdot\text{m}^3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} B \\ = \begin{bmatrix} 0.45 \times 10^{-3} & 0.98 \times 10^{-3} & -0.71 \times 10^{-3} \\ 0.98 \times 10^{-3} & 0.45 \times 10^{-3} & -0.71 \times 10^{-3} \\ -0.71 \times 10^{-3} & -0.71 \times 10^{-3} & 1.02 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \text{GPa}\cdot\text{m}^2 \\ \hline F = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.01 \\ 0.01 & 0.10 \end{bmatrix} \text{GPa}\cdot\text{m} \end{array}$$

Cabe resaltar que los resultados obtenidos para estas matrices con el software MAC LAM son idénticos.

VI.1.2.1 Tensión N_y

Dado que los laminados C y D no son simétricos respecto al plano medio, se van a producir giros al aplicar la carga de tensión N_y por la falta de compensación simétrica, provocando que se desplace en la dirección z (ver Tabla 9). Los resultados obtenidos en SCILAB y en COMSOL son prácticamente iguales. Para el laminado C se observa que los valores del desplazamiento en z varían de 0 a 6.2×10^{-9} m en COMSOL y SCILAB, mientras que para el laminado D van de -35×10^{-9} a 5×10^{-9} m en ambos programas.

Tabla 9. Desplazamientos U_z en **m** en los laminados C y D causados por una carga N_y y calculados con COMSOL y SCILAB.

Laminado	Resultados en COMSOL	Resultados en SCILAB
C		
D		

Los giros en y de los laminados C y D se incrementan en valor absoluto a mayor distancia del empotramiento debido a que este mantiene inmóvil esa parte del laminado a causa de que los materiales del laminado son distintos, impidiendo así la compensación simétrica (ver Tabla 10). los resultados obtenidos en COMSOL y SCILAB coinciden bastante. Los valores del giro en y para el laminado C en ambos programas van de -12.2×10^{-9} a 0 rad y para el laminado D estos varían de -1.5×10^{-8} a 9.1×10^{-8} rad.

Tabla 10. Rotación ϕ_y en **rad** en los laminados C y D causados por una carga N_y y calculados con COMSOL y SCILAB.

Laminado	Resultados en COMSOL	Resultados en SCILAB
C		
D		

VI.1.2.2 Flexión M_y

Los desplazamientos en x , por ser asimétrico el laminado, se verán influenciados por la curvatura producto de la asimetría en los laminados C y D. En este último los desplazamientos varían de forma asimétrica debido a que en ninguno de los ejes hay simetría en las capas, por lo que, a pesar de los ángulos, la diferencia en propiedades de cada capa impide la compensación simétrica. Todo esto se muestra en la Tabla 11. Los resultados obtenidos en SCILAB y en COMSOL tienen bastante similitud. Para el laminado C se tiene un rango de valores de desplazamiento en x que van de -8.2×10^{-10} a 8.1×10^{-10} m en COMSOL y SCILAB, mientras que para el laminado D van de -5×10^{-8} a 14×10^{-8} m.

Tabla 11. Desplazamientos U_x en **m** en los laminados C y D causados por una carga M_y y calculados con COMSOL y SCILAB.

Laminado	Resultados en COMSOL	Resultados en SCILAB
C		
D		

Los desplazamientos en y bajo la carga M_y en los laminados C y D son mostrados en la Tabla 12. El perfil de desplazamientos en el laminado simétrico C es recto, pero en el D, por ser asimétrico respecto a al plano medio, el perfil es parecido a una parábola. Este perfil no lineal en el laminado D se debe a las diferentes direcciones de las fibras en cada capa, en la diferencia de materiales y la falta de compensación geométrica. Existe igualdad entre los resultados obtenidos en COMSOL y SCILAB. Para el laminado C se observa que los valores máximos y mínimos del desplazamiento y varían de -12.2×10^{-9} a 0 m en COMSOL y SCILAB y para el laminado D van de -0.8×10^{-9} a 10.2×10^{-9} m.

Tabla 12. Desplazamientos U_y en **m** en los laminados C y D causados por una carga M_y y calculados con COMSOL y SCILAB.

Laminado	Resultados en COMSOL	Resultados en SCILAB
C		
D		

VI.1.2.3 Fuerza cortante Q

El desplazamiento en la dirección z en el laminado C se incrementa de manera uniforme en la dirección x debido a que el laminado es simétrico. En el laminado D que es asimétrico, el desplazamiento varía de forma asimétrica debido a la falta de compensación. En ambos laminados el desplazamiento en z incrementa su valor absoluto a mayor lejanía del empotramiento (ver Los resultados obtenidos en COMSOL y SCILAB tienen bastante similitud. Para el laminado C se tienen valores de 0 a 23×10^{-6} m y en el D van de 0 a 31×10^{-6} m tanto en COMSOL como en SCILAB.

Tabla 13). Los resultados obtenidos en COMSOL y SCILAB tienen bastante similitud. Para el laminado C se tienen valores de 0 a 23×10^{-6} m y en el D van de 0 a 31×10^{-6} m tanto en COMSOL como en SCILAB.

Tabla 13. Desplazamientos U_z en **m** en los laminados C y D causados por una carga Q y calculados con COMSOL y SCILAB.

Laminado	Resultados en COMSOL	Resultados en SCILAB
C		
D		

El giro en y se incrementa a mayor lejanía del empotramiento en los laminados C y D. En este último hay una ligera curvatura en la variación del giro debido a la completa asimetría del laminado (ver Tabla 14). Nuevamente, existe una perfecta concordancia entre los resultados obtenidos en COMSOL y SCILAB. Para el laminado C los giros en y varían de -35×10^{-6} a 0 rad y para el laminado D van de -50×10^{-6} a 0 rad en COMSOL y SCILAB.

Tabla 14. Rotaciones ϕ_y en **rad** en los laminados C y D causados por una carga **Q** y calculados con COMSOL y SCILAB.

Laminado	Resultados en COMSOL	Resultados en SCILAB
C		
D		

Como se puede apreciar en las tablas tanto el orden de los colores como los valores máximos y mínimos de desplazamientos y giros son casi iguales tanto en COMSOL como en el software desarrollado en SCILAB (salvo pequeñas diferencias debido a la poca confiabilidad de los mallados), concluyendo así que este programa es confiable.

VI.1.3 Gráficas de esfuerzos y deformaciones para el laminado B sujeto a la tensión N_y

Anteriormente, se mostraron las gráficas de desplazamientos para diferentes laminados bajo diferentes cargas. Ahora se mostrarán las gráficas de esfuerzos y deformaciones en el plano para el laminado B bajo la carga $N_y = 1N/m$. En todas las capas, los esfuerzos y deformaciones varían de

capa en capa debido a las diferentes direcciones de cada una. Es importante subrayar que, para calcular los esfuerzos, se tienen que derivar los desplazamientos para obtener deformaciones y para esto, en SCILAB se utiliza un método llamado de “parches” (Barlow. 1976). Por ser simétrico el laminado, solo se consideran las capas 1 y 2. Los resultados de COMSOL y SCILAB varían cerca del empotramiento debido a la singularidad de esfuerzos que se genera ahí, a que el mallado seleccionado es burdo y a que COMSOL utiliza un método de suavizado para el graficado diferente al de SCILAB.

En la Tabla 15, se aprecia que para ambas capas las deformaciones son iguales debido a la simetría del material, el mayor valor absoluto de deformación se halla lejos del empotramiento, el cual le impide deformarse, y se debe al efecto Poisson. Hay que recalcar que se observan ligeras diferencias en ambos programas cerca del empotramiento debido al mallado y los diferentes métodos empleados para cada uno. A pesar de esto, hay buena congruencia en los resultados.

Tabla 15. Deformación longitudinal ϵ_{11} en el laminado B bajo la carga N_y .

Capa	Resultados en SCILAB	Resultados en COMSOL
1		
2		

La Tabla 16 muestra que, debido a que en el empotramiento el material no puede deformarse, solo se deformará lejos de este. Los valores máximos y mínimos son los mismos para ambas capas debido a la compensación simétrica que se produce en el laminado. Lejos del empotramiento, los resultados de COMSOL y SCILAB coinciden.

Tabla 16. Deformación longitudinal ϵ_{22} en el laminado B bajo la carga N_y .

Capa	Resultados en SCILAB	Resultados en COMSOL
1		
2		

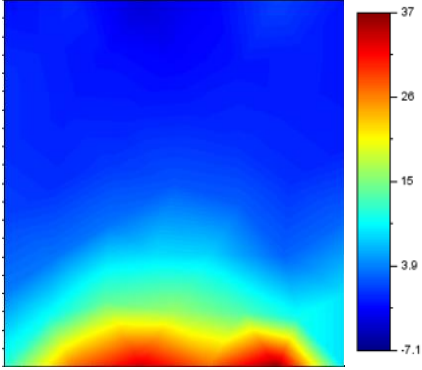
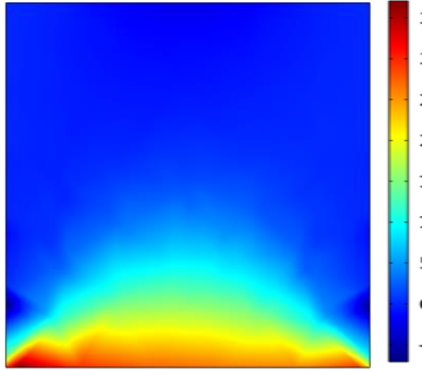
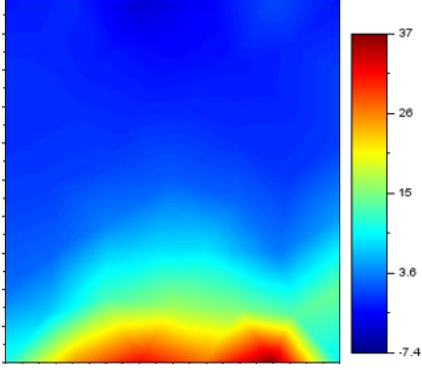
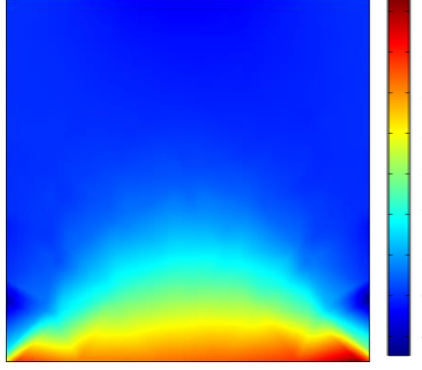
En la Tabla 17 se aprecia que las deformaciones angulares ϵ_{12} , lejos del empotramiento se hacen cero debido a que es un laminado balanceado (capas a 45° y -45°). La magnitud de estas deformaciones en todo el laminado son pequeñas comparadas contra las deformaciones ϵ_{22} .

Tabla 17. Deformación angular ϵ_{12} en el laminado B bajo la carga N_y .

Capa	Resultados en SCILAB	Resultados en COMSOL
1		
2		

Revisemos ahora los esfuerzos σ_{11} en la mitad de las capas 1 y 2. En el empotramiento hay concentración de esfuerzos, pero lejos de éste, los esfuerzos son casi constantes y su valor es prácticamente el mismo cuando es calculado con SCILAB y COMSOL (Ver Tabla 18).

Tabla 18. Esfuerzo normal σ_{11}^{MIDDLE} en el laminado B bajo la carga N_y .

Capa	Resultados en SCILAB	Resultados en COMSOL
1	 <p>Heatmap showing normal stress distribution in layer 1 using SCILAB. The color scale ranges from -7.1 (blue) to 37 (red). The plot shows a semi-circular stress concentration at the bottom edge, with values increasing from approximately 3.0 in the center to 37 at the edges.</p>	 <p>Heatmap showing normal stress distribution in layer 1 using COMSOL. The color scale ranges from -5 (blue) to 35 (red). The plot shows a semi-circular stress concentration at the bottom edge, with values increasing from approximately 5 in the center to 35 at the edges.</p>
2	 <p>Heatmap showing normal stress distribution in layer 2 using SCILAB. The color scale ranges from -7.4 (blue) to 37 (red). The plot shows a semi-circular stress concentration at the bottom edge, with values increasing from approximately 3.6 in the center to 37 at the edges.</p>	 <p>Heatmap showing normal stress distribution in layer 2 using COMSOL. The color scale ranges from -5 (blue) to 35 (red). The plot shows a semi-circular stress concentration at the bottom edge, with values increasing from approximately 5 in the center to 35 at the edges.</p>

Los esfuerzos longitudinales aumentan en las esquinas del empotramiento causando una singularidad de esfuerzos (VerTabla 19). Lejos del empotramiento, estos esfuerzos son los de mayor magnitud y los valores calculados con COMSOL y SCILAB concuerdan.

Tabla 19. Esfuerzo normal $\sigma_{22}^{\text{MIDDLE}}$ en el laminado B bajo la carga N_y .

Capa	Resultados en SCILAB	Resultados en COMSOL
1		
2		

Los esfuerzos cortantes σ_{12}^{MIDDLE} (ver Tabla 20) en la mitad de las capas 1 y 2 son mayores en las esquinas porque el empotramiento mantiene en su sitio al material para impedir las deformaciones transversales que se originarían libremente por el efecto Poisson. En el resto del laminado estos esfuerzos son 0 al igual que las deformaciones angulares ε_{12} , debido a que es un laminado balanceado con capas a 45 y -45 grados. Lejos del empotramiento, los valores calculados por SCILAB y COMSOL concuerdan.

Tabla 20. Esfuerzo cortante σ_{12}^{MIDDLE} en el laminado B bajo la carga N_y .

Capa	Resultados en SCILAB	Resultados en COMSOL
1		
2		

VII. Conclusión

En este trabajo, se desarrolló un software en SCILAB que permite analizar placas laminadas por medio de elementos finitos. Los objetivos se llevaron a cabo exitosamente y la hipótesis fue confirmada. De esta tesis es importante resaltar lo siguiente:

- El modelo matemático usado para este software fue el método de elementos finitos con elementos triangulares y funciones de forma de grado 3.
- El programa se desarrolló en el software científico SCILAB.
- El programa puede calcular la matriz de rigidez ABDF.
- Se pueden determinar desplazamientos, deformaciones, fuerzas generalizadas y esfuerzos por capa cuando la placa laminada es sometida a cargas cualesquiera.
- El software realizado fue validado comparando sus resultados contra los de los programas COMSOL y MAC LAM.
- Finalmente es posible graficar los resultados por medio de mapas de colores.

Hay que tener en cuenta que aún resta por hacer lo siguiente:

- Visualización tridimensional del laminado bajo las cargas aplicadas.
- Añadir diferentes condiciones térmicas, acústicas y de humedad.
- Calcular las propiedades del laminado aplicando la ley de mezclas.
- Calcular la matriz ABDF por el método de rigideces, no solo por inversa de complianzas.
- Agregar opciones para cambiar el sistema de unidades.
- Determinar si el material resiste las cargas aplicadas.
- Crear una interfaz gráfica amigable.

Este software desarrollado tuvo sus objetivos cumplidos, sus logros realizados y los aspectos que aún se pueden mejorar. Sin embargo, se puede afirmar que se ha abierto una nueva posibilidad al campo de la ingeniería. Los software que ya existían para analizar placas laminadas por elementos finitos son costosos y los gratuitos como el MAC LAM solo calculan la matriz ABDF. Ahora se tiene un programa que calcula y grafica desplazamientos, deformaciones, fuerzas y esfuerzos generalizados.

VIII. Bibliografía

Cui, Y., Shi, L., & Zhao, F. (2010). Modal Analysis of Wind Turbine Blade Made of Composite laminated plates. Baoding, China: Department of mechanical engineering North China Electric Power University.

Díaz, A., Castañeda, R., Gameros, R., Caron, J. F., & Ehrlacher, A. (2004). MAC LAM: New Software for the Mechanical Analysis of Composites and Laminates. Chihuahua, México: Civil Coup Press.

Dietrich, A. B. (2009). Materiales compuestos. Barcelona: Universidad Politécnica de Catalunya.

Domínguez, A. (2015). RESOLVEDOR DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES UNIDIMENSIONALES POR EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO. Chihuahua, Chih: UACH.

Fanguero, R. (2011). Fibrous and composite materials for civil engineering applications. Cambridge: Woodhead.

Hull, D. (2003). Materiales compuestos. Barcelona: Reverté.

Jones, R. M. (1984). Mechanics of Composite Materials. Blacksburg, Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State University.

Liao, W., Dong, N., & Fan, T. (2009). Application of SCILAB in teaching of engineering numerical computations. IEEE International Workshop on Open-Source Software for Scientific Computation (OSSC).

Nettles, A. T. (1994). Basic Mechanics of Laminated plates: Alabama. Marshall Space flight Center.

Pérez, M. A. (2014). Aplicaciones avanzadas de los materiales compuestos en la obra civil y la edificación. Barcelona: Omnia Science.

Soberanis, G. (2006). PREPARACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES COMPUESTOS LAMINADOS FIBROREFORZADOS MULTICAPA. Mérida, Yucatán. CICY.

Islas Espitia, J. (2019). Software para determinar propiedades elasticas efectivas de materiales compuestos unidireccionales por elementos finitos 2D. Chihuahua,, Chihuahua.

Linero Segrera, D. L. & Alexander, G. A. (2010). Elementos de la mecánica del medio continuo para cuerpos sólidos. Bogotá: Opciones Graficas Editores.

L. C., José, (1999). Mecánica de los medios continuos. Cuenca: Universidad de Castilla-La Mancha.



Eringen, A.C. (1980). "Mechanics of continua". 2a. Ed. Krieger Publishing Co.

Gubert, X. A., & Ballester, M. F. (2012). *Mecánica del medio continuo en la ingeniería*. Barcelona: Universidad Politècnica de Catalunya.

Yvonnet, J. (2019). *Computational Homogenization of Heterogeneous Materials with Finite Elements*. Springer International Publishing.

Tsai, S. W., & Miravete, A. (1997). *Diseño y análisis de materiales compuestos*. Barcelona: Reverté.

Miravete, A. (2020). *Materiales compuestos* (Vol. 2). Loreto: Reverté.

Cardona, A., & Fachinotti, V. (2019). *Introducción al Método de los Elementos Finitos*. Santa Fe, Argentina, Cimec (UNL/Conicet),

Dhatt, G., Lefrancois, E., & Touzot, G. (2012). *Finite element method*. John Wiley & sons.

Vasiliev, V. V. & Morozov, E. (2001) *Mechanics and Analysis of Composite Materials*- Elsevier. Amsterdam.

J. Barlow (1976). Optimal stress locations in finite element models. *Int. J. Numer. Meth. England*.