

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIHUAHUA

FACULTAD DE ZOOTECNIA Y ECOLOGÍA

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO



**SELECCIÓN Y AJUSTE DE MODELOS NO LINEALES: APLICACIONES AL
CRECIMIENTO ANIMAL**

POR:

ING. AMANDA CASTRO OCHOA

**TESINA PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL
GRADO DE MAESTRÍA PROFESIONAL EN ESTADÍSTICA APLICADA**

CHIHUAHUA, CHIH., MÉXICO

SEPTIEMBRE DE 2020



Selección y ajuste de modelos no lineales: aplicaciones al crecimiento animal. Tesis presentada por Amanda Castro Ochoa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría Profesional en Estadística Aplicada, ha sido aprobado y aceptada por:

Ph.D. Carlos Ortega Ochoa
Director de la Facultad de Zootecnia y Ecología

D.Ph. Agustín Corral Luna
Secretario de Investigación y Posgrado

Ph.D. Iván Adrián García Galicia
Coordinador Académico

D.Ph. Joel Domínguez Viveros
Presidente

11 de Septiembre del 2020.

Fecha

Comité:
Dr. Guadalupe Nelson Aguilar
Palma
D.Ph. Mieke Titulaer
Dra. Rosalía Sánchez Basualdo

© Derechos Reservados
AUTOR. AMANDA
CASTRO OCHOA
DIRECCIÓN: PERIFÉRICO
FRANCISCO R. ALMADA
KM. 1, CHIHUAHUA,
CHIH., MÉXICO C.P. 31453
SEPTIEMBRE 2020

Agradecimientos

A la Universidad Autónoma de Chihuahua por apoyar económicamente la realización de esta maestría.

A los asesores por el apoyo proporcionado.

Dedicatoria

Dedicada a mis papas, hermanos y a mi novio, Guillermo.

Curriculum vitae

El autor nació el 6 de Julio de 1990 en Ciudad Cuauhtémoc Chihuahua México.

- 2008-2013. Estudios de Ingeniería Física en la Universidad Autónoma de Chihuahua Facultad de Ingeniería.
- 2014 Maestro de asignatura del área de ingeniería industrial y gastronomía en el Colegio Cultural Universitario Campus Cuauhtémoc.
- 2014-2016 Maestro de grupo de matemáticas y física en Colegio Trilingüe Gestalt.
- 2014-2018. Maestro de asignatura del área de mecatrónica, mantenimiento industrial, mantenimiento en refrigeración, desarrollo de negocios y paramédico en la Universidad Tecnológica de Chihuahua, Unidad Académica Cuauhtémoc. En el mismo tiempo coordinación de secuencias didácticas y de tutorías.
- 2015-2017 Estudios de Maestría en Competencias Docentes en el Colegio Chihuahuense de Estudios de Posgrado. Tesis: Trabajo colaborativo en academias docentes.
- 2015 Diplomado en Diseño de Ambientes de Aprendizaje Basado en Competencias por la Universidad Tecnológica de Chihuahua.
- 2016-2017 Estudios de Maestría en Administración de Sistemas Estratégicos en el Colegio Nuevo Vizcaya. Tesis: Administración de Sistemas Solares.
- 2017- actual Maestro de asignatura del área de matemáticas, física y estadística de la Facultad de Zootecnia y Ecología de la Universidad Autónoma de Chihuahua.
- 2017-2019 Estudios de Maestría Profesional en Estadística Aplicada en la Universidad Autónoma de Chihuahua.

RESUMEN

SELECCIÓN Y AJUSTE DE MODELOS NO LINEALES: APLICACIONES AL CRECIMIENTO ANIMAL

POR:

ING. AMANDA CASTRO OCHOA

Maestría Profesional en Estadística Aplicada

Secretaría de Investigación y Posgrado

Facultad de Zootecnia y Ecología

Universidad Autónoma de Chihuahua

Presidente: D. Ph. Joel Domínguez Viveros

El objetivo de este estudio es comparar diferentes modelos matemáticos para describir el crecimiento de distintas razas de borregos de acuerdo a varias publicaciones e investigaciones. La comparación de los modelos se dio al utilizar criterios de selección, para determinar así los modelos no lineales más adecuados. Se analizaron los parámetros encontrados y se realizó una comparación de acuerdo con la raza, el modelo y los criterios de selección. Todo el trabajo realizado fue con la finalidad de identificar aquellos modelos con mayor frecuencia de elección en los borregos, independientemente de la cantidad de observaciones y de la raza.

ABSTRACT

SELECTION AND ADJUSTMENT OF NON-LINEAR MODELS: APPLICATIONS TO ANIMAL GROWTH

BY:

ING. AMANDA CASTRO OCHOA

The objective of this study is to compare different mathematical models to describe the growth of different sheep's breeds according to some publications and researches. The models were compared using selection criteria to choose the most suitable non-linear models. The parameters found were analyzed and a comparison was made according to breed, model and selection criteria. The work done was to identify those models with the highest frequency of choice in sheep, regardless of the number of observations and their breed.

CONTENIDO

RESUMEN	v
ABSTRACT	vi
LISTA DE CUADROS	viii
LISTA DE GRÁFICAS	ix
INTRODUCCIÓN	10
REVISIÓN DE LITERATURA	14
Funciones de crecimiento	14
Métodos de estimación en el análisis de regresión no lineal	16
Criterios para la selección y/o jerarquización de modelos no lineales	17
Coefficientes de regresión	24
Pruebas estadísticas para validar los coeficientes de regresión	28
Curvas de crecimiento	29
Indicadores de crecimiento	32
MATERIALES Y MÉTODOS	35
RESULTADOS Y DISCUSIÓN	61
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	69
LITERATURA CITADA	71

LISTA DE CUADROS

Cuadro		Página
1	Modelos no lineales	15
2	Indicadores en modelos no lineales	27
3	Comparación de autores, razas y modelos por criterios de selección	37
4	Modelos considerados por los distintos autores para la elección del mejor	41
5	Valor de los parámetros según el mejor modelo para las distintas razas	44

LISTA DE GRÁFICAS

Gráfica		Página
1	Curva de crecimiento raza Baluchi.....	49
2	Curva de crecimiento raza comercial sheep.....	51
3	Curva de crecimiento raza Blackbelly.....	52
4	Curva de crecimiento raza Dorper con razas Brasileñas....	54
5	Curva de crecimiento raza Dorper.....	55
6	Curva de crecimiento raza Mengali.....	56
7	Curva de crecimiento raza Rambouillet.....	58
8	Curva de crecimiento raza Santa Inés.....	59

INTRODUCCIÓN

Según la Real Academia de la Lengua Española (2020), el crecimiento es la acción y/o efecto de ir en aumento, siendo en varias ocasiones un proceso irreversible, en el cual el organismo experimenta la proliferación celular. De manera más puntual, el crecimiento es el aumento en el tamaño o peso que experimenta un animal, así como cambios de forma, composición y función. El crecimiento animal se puede interpretar como un incremento en el tamaño, forma, peso y/o longitud de una especie en cuestión, comparando dos momentos en un periodo de vida del animal; siendo los principales indicadores del crecimiento (Álvarez, 2005) el incremento de peso vivo (masa corporal) y el tamaño (longitud y altura). El crecimiento y desarrollo de los animales se entiende pues como un aumento de las partes del organismo en intervalos de tiempo, de manera específica para cada especie, considerando que el grado de crecimiento y desarrollo definidos para la edad adulta está sujeto a la herencia, variabilidad individual y nutrición (Zaragoza, 1998).

El crecimiento animal es un factor muy importante para evaluar el área dedicada a la producción de productos, tales como carne; tomando en cuenta el concepto de crecimiento, no se debe restringir únicamente a factores genético, si no considerar también efectos ambientales ya que ellos también influyen de manera directa (Agudelo, *et al.*, 2007). Considerando pues el crecimiento como el aumento, con la edad, de las dimensiones lineales del cuerpo y/o del peso vivo unido a cambios importantes en la composición

corporal es importante identificar aquellos factores que influyen en él (Álvarez, 2005).

La variabilidad en el crecimiento se ve afectado por factores tales como genéticos y ambientales. Con relación a los factores genéticos que influyen para determinar la velocidad de crecimiento, como la edad y condición corporal de la madre, así como características específicas del padre (Espinoza, *et al.*, 2015). El factor genético, hereditario para la especie y la raza, se suma a aspectos tales como alimentación de la madre en la gestación y a partir del nacimiento del animal en cuestión, el clima en el cual se desarrolló la gestación y el nacimiento, así como el sexo del nacido y el estado de salud de la cría y los progenitores. Los factores ambientales, generalmente se encuentran asociados con la condición corporal al parto y la dinámica durante el periodo posparto. De igual manera la temperatura ambiental influye en la ganancia de peso, siendo 15°C el valor ideal para alcanzar mejores condiciones de peso. Otro aspecto importante por considerar es la exposición a la luz, ya que mayores periodos de luz generaran mayores ganancias de peso.

Un modelo matemático es una construcción matemática abstracta y simplificada relacionada con una parte de la realidad y creada para un propósito particular. En el análisis del crecimiento animal ha sido muy útil el uso de modelos matemáticos en búsqueda de encontrar explicaciones a un comportamiento en específico, así como lograr predicciones futuras. Los modelos matemáticos han sido utilizados para medir aspectos variantes biológicos, siendo muy útiles para modelar el crecimiento animal desde un

punto de vista lineal y otro no lineal, buscando aquellos con mayor ajuste y simplicidad en la interpretación biológica (Agudelo, *et al.*, 2007).

Para describir el desarrollo y el crecimiento animal se han utilizado diversos modelos tanto lineales como no lineales buscando la precisión en la descripción del fenómeno e intentar asemejar la realidad para poderla interpretar, entender o predecir. En el caso de los modelos lineales, estos presentan un patrón de comportamiento claramente definido, describiendo así a eventos o procesos con claridad de comportamiento, siendo fácil de identificar el crecimiento y decaimiento de la función representando así, tasas de crecimiento no muy ajustadas a ciertas realidades biológicas, como en este caso el crecimiento animal. En los modelos no lineales, la rapidez de crecimiento es relativa o específica, adecuándose a cada situación en particular (Sarango, *et al.*, 2008). La principal ventaja de los modelos no lineales sobre muchos otros procedimientos de ajuste de curvas es la amplia gama de funciones que se pueden ajustar y debido a la gran cantidad de factores genéticos y ambientales que influyen en el cambio del peso a través del tiempo, cada animal, cada raza, cada sexo tiene un patrón de crecimiento con características propias por lo que los modelos lineales dejan de ser útiles o precisos (Meerschaert, 2012).

Otra particularidad que poseen los modelos no lineales es que presentan un mayor ajuste a las condiciones de crecimiento otorgando información importante y más exacta para efectos de investigación y recomendaciones de orden productivo que los modelos lineales, cuyo comportamiento responde a

eventos mayormente controlados con condiciones no variables. Debido a las características intrínsecas del crecimiento animal (al menos en un primer momento), este suceso se puede interpretar de mejor manera con un modelo no lineal, ya que representa una “S” (forma sigmoideal) con en tres fases claras en el proceso, la aceleración, que representa el crecimiento acelerado y que llega al máximo en el punto de inflexión donde inicia la fase de desaceleración que se caracteriza por la disminución de la tasa de crecimiento debido a una serie de factores fisiológicos.

De manera posterior, el proceso se pudiera interpretar como lineal, donde el crecimiento se presenta sólo para reposición de tejido, por lo tanto, corresponde a la llegada del peso adulto (Hernández y Rincón, 2016). Gran cantidad de modelos se han empleado para describir la relación entre la edad del animal, su velocidad de crecimiento y madurez, pero ya que el crecimiento animal no sigue una tendencia lineal, es necesario utilizar modelos no lineales que permitan estudiar el crecimiento animal de manera más adecuada; según lo mencionado, la relación entre el cambio de una dimensión y el tiempo puede expresarse mediante las curvas generales de crecimiento que siguen, como se ha mencionado una forma sigmoidea (Parés y Kucherova, 2014).

En la presente investigación, los objetivos fueron: en el apartado de revisión de literatura desarrollar los métodos y procedimientos utilizados en el análisis de modelos no lineales; y, realizar una revisión y análisis de la aplicación de los modelos no lineales en el crecimiento de ovinos.

REVISIÓN DE LITERATURA

En el marco del primer objetivo, desarrollar un instrumento de referencia para analizar, seleccionar y ajustar modelos no lineales, específicamente en el crecimiento animal como parte del posgrado en estadística aplicada. Se detallan en los próximos párrafos las funciones de crecimiento utilizadas para explicar tal variable (crecimiento).

Funciones de crecimiento

Son múltiples las funciones que han sido usadas para representar los cambios en las medidas de los pesos con respecto a la edad. Las 17 funciones más utilizadas para describir el crecimiento animal se citan en el Cuadro 1, el cual indica el nombre que recibe el modelo –muchos de ellos por el autor del mismo- la ecuación que lo representa y la cantidad de parámetros que considera cada uno de los modelos. Varios de estos modelos incluyen únicamente los primeros tres parámetros excluyendo en su ecuación al punto de inflexión.

Cuadro 1. Modelos no lineales.

Modelo	Ecuación	Parámetros
Von Bertalanffy	$W_t = A(1 - Be^{-kt})^3 + \varepsilon$	3
Gompertz	$W_t = Ae^{-Be^{-kt}} + \varepsilon$	3
Brody	$W_t = A(1 - Be^{-kt}) + \varepsilon$	3
Logistic	$W_t = A(1 + e^{-kt})^{-M} + \varepsilon$	3
Richards	$W_t = A(1 - Be^{-kt})^M + \varepsilon$	4
Schnute	$W_t = \frac{A}{(1 + Me^{(kB-t)})^{\frac{1}{M}}} + \varepsilon$	4
Mitscherlich	$W_t = A(1 - e^{(kB-kt)}) + \varepsilon$	3
Meloun I	$W_t = A - Be(-kt) + \varepsilon$	3
Meloun II	$W_t = A(1 - e^{-t-Bk}) + \varepsilon$	3
Meloun III	$W_t = A - e^{-B-kt} + e_i + \varepsilon$	3
Meloun IV	$W_t = A - Be^{-ktM} + \varepsilon$	4
Janoschek	$W_t = A(1 - e^{-Bt^k}) + \varepsilon$	3
Morgan Mercer Flodin	$W_t = A - \frac{A - B}{1 + (kt)^{\delta'}} + \varepsilon$	3
Negative exponencial	$W_t = A(1 - e^{-kt}) + \varepsilon$	2
Verhulst	$W_t = \frac{A}{(1 + Be^{kt})} + \varepsilon$	3
Weibull	$W_t = A - (A - B)e^{-kt} + \varepsilon$	3
Gamito	$W_t = \frac{1}{A + Bk} + \varepsilon$	3

Dónde W_t es el peso en un tiempo t , A es el peso asintótico cuando la edad tiende a infinito, k es la tasa de maduración, M es el punto de inflexión y B es la asíntota baja que indica la proporción del peso asintótico a la madures que se ganará después del nacimiento (Acioli Da Silva, *et al.*, 2011; Aman Ullah, *et al.*, 2013; Bahreini, *et al.*, 2014; Bathaei y Leroy 1996; Ben Hamouda y Atti, 2010; Braga Lobo, *et al.*, 2006; Campos de Oliveira, *et al.*, 2010; Canul, *et al.*, 2019; Cazonatto y Da Silva, 2017; De Andrade Souza, *et al.*, 2013; Gbangboche, *et al.*, 2008; Hossein Zadeh, 2011. Kariuki, *et al.*, 2010; Keskin, *et al.*, 2009; Kopulzu, *et al.*, 2014; Lambe, *et al.*, 2006; Lewis, *et al.*, 2002; Lupi, *et al.*, 2015; Malhado, *et al.*, 2009; Masood Tariq, *et al.*, 2013; Rocha Sarmiento, *et al.*, 2006; Tariq, *et al.*, 2011; Topal, *et al.*, 2004).

Métodos de estimación en el análisis de regresión no lineal

A continuación se explican los métodos más comunes utilizados para la estimación en el análisis de regresión no lineal.

Algoritmo de Gauss Newton. Método más utilizado para resolver los mínimos cuadrados ya que converge de manera cuadrática. Se utiliza el resultado de los mínimos cuadrados lineales en varias etapas. En el método, la velocidad de convergencia decrece con la no linealidad, por lo que al utilizarse un modelo no lineal se espera lentitud a la convergencia. Otro aspecto importante es que el método no puede converger si el residuo es grande (Bates, 1988).

Método de Gradiente o de Cauchy. Método de descenso que comienza la iteración en punto escogido de manera arbitrario continuando así hasta el máximo descenso de la función buscando la solución mediante una sucesión de puntos. El método es lento por buscar la velocidad lineal, ya que se busca encontrar la dirección de descenso por iteraciones hasta la convergencia global (Macías, 2018).

Método de Levenberg-Marquardt. Método que se basa en interpolaciones entre el método de Gauss Newton y el método Cauchy. La aproximación está basada en la máxima vecindad donde la aproximación de Taylor de primer orden da una adecuada representación del modelo no lineal. Si se poseen

grandes valores en los residuos o bien cuando la información es fuertemente no lineal, la convergencia es lenta (Cortés, 2004).

Algoritmo Newton Raphson. Método basado en minimizar la suma de cuadrados de los residuos. Es utilizado de manera iterativa hasta alcanzar un valor para el vector de estimadores que sea útil para lograr la convergencia y así satisfacer los criterios de esta. El método utiliza el polinomio de Taylor, y se resuelve la ecuación de segundo grado encontrando así el mínimo. Este algoritmo continúa las iteraciones hasta que se dé la convergencia entre las estimaciones hasta el momento en el que dos iteraciones sucesivas sean iguales (UAM Cuajimalpa, 2020).

Criterios para la selección y/o jerarquización de modelos no lineales

Otro aspecto importante, al buscar el modelo ideal para un fenómeno, son los criterios para la selección y/o jerarquización de modelos no lineales. Debido a que se tiene una gran cantidad de modelos que pueden describir el comportamiento de la ganancia de peso en ovinos, es necesario aplicar criterios para elegir aquel modelo que se ajusta de mejor manera a la raza estudiada. Para poder tomar la decisión antes mencionada se utilizan varios criterios de selección y/o jerarquización mencionados a continuación:

Coeficiente de determinación (R^2). El R^2 se define como la proporción de la varianza total explicada por los modelos y expresada en porcentajes.

El R^2 es el estadístico más utilizado como indicador de la bondad de ajuste. El modelo con el valor más alto en este coeficiente indica un mejor ajuste.

$$R^2 = 1 - (SCE/SCT)$$

Dónde SCE es la suma de cuadrados de residual y SCT es la suma de cuadrados del total.

Criterio de información de Akaike (AIC). Cuando se evalúan una serie de distintos modelos, constituidos por un diferente número de parámetros (k), una metodología para compararlos corresponde a la función de máxima verosimilitud. Este criterio tiene en cuenta los cambios en el ajuste y las diferencias en el número de parámetros entre dos modelos. Los mejores modelos son aquellos que presentan el menor valor de AIC.

$$AIC = -2 * \text{Log } L + 2p$$

Dónde L es la función de verosimilitud y p es el número de parámetros independientes estimados en el modelo.

Criterio de información Bayesiano (BIC). Es calculado para diferentes modelos para una función de verosimilitud L , el número de parámetros ajustados (p) y el número total de datos (n). El modelo que presente el valor más bajo de BIC es considerado el mejor en explicar los datos con el mínimo número de parámetros.

$$BIC = -2 * \text{Log } L + \log(n) * p$$

Error cuadrático medio (MSE). El error cuadrático medio dice qué tan cerca está una línea de regresión de un conjunto de puntos. Lo hace tomando las distancias desde los puntos hasta la línea de regresión (estas distancias son los "errores") y cuadrándolos. La cuadratura es necesaria para eliminar

cualquier signo negativo; también les da más peso a las diferencias más grandes. Se llama el error cuadrático medio cuando se encuentra el promedio de un conjunto de errores.

$$MSE = \frac{SCE}{n}$$

Donde SCE representa la suma de cuadrados del error y n el total de datos. El modelo que presente un menor valor es considerado mejor para ser elegido.

Desviación media absoluta (MAD). La desviación media absoluta fue propuesta por Sarmento en el 2006 para evaluar la calidad del ajuste calculándose:

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^n |Y_i - \hat{Y}_i|}{n}$$

Donde Y_i es el valor observado, \hat{Y}_i es el valor estimado y n es el tamaño de muestra. Un valor bajo de MAD es el que mejor ajusta.

Porcentaje de convergencia (C%). Considera la existencia de convergencia o no expresándola en manera porcentual tomando como mejor aquel con valores más altos.

Estadístico Durbin-Watson (DW). El estadístico DW se utiliza para evaluar la existencia de autocorrelación en los residuales y se calcula a partir de la siguiente ecuación:

$$DW = 2(1 - p)$$

$$p = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}.$$

Donde e_t = residual al tiempo t , y e_{t-1} = residual al tiempo $t-1$.

El estadístico DW analiza las auto correlaciones en los errores, mediante tres planteamientos:

- a) si $2 < DW < 4$ existe auto correlación negativa
- b) si $0 < DW < 2$ indica ausencia de auto correlación; y,
- c) si $DW < 0$ indica que existe auto correlación positiva.

Los modelos con menor auto correlación ofrecen residuales más pequeños, sin presentar algún tipo de tendencia.

Raíz del error de predicción promedio (MEP). Es un eficiente criterio para probar la calidad del modelo de regresión:

$$MEP = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i^*)^2}{n}$$

Donde y_i representa el valor observado, \hat{y}_i^* el dato estimado basado en el valor obtenido del ajuste sin observaciones y n el número de observaciones.

Coefficiente de determinación de predicción (R_p^2). Es un evaluador común a R^2 presentando la misma interpretación, la diferencia es que el error al cuadrado y la suma total son reemplazado, respectivamente, por el término $nMEP$ y $\sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 - n\bar{y}^2$ que incluyen la influencia de la ausencia de cada observación del modelo ajustado. La fórmula es:

$$\hat{R}_p^2 = 1 - \frac{n MEP}{\sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 - n\bar{y}^2}$$

Dónde \bar{y} denota la media de y .

Coefficiente de determinación ajustado (R_{adj}^2). Evaluador semejante a los dos coeficientes de determinación mencionados con anterioridad, el cual busca el valor más alto para elegir al mejor modelo (el coeficiente es un indicador cuyos valores oscilan entre 0 y 1, y aquel modelo con mejor ajuste se espera su valor cercano a la unidad). El coeficiente ajustado se calcula:

$$R_{adj}^2 = 1 - \left[\frac{(n-1)}{(n-p)} \right] (1 - R^2)$$

Donde R^2 es el coeficiente de determinación, n es el total de observaciones, kp es el número de parámetros en la ecuación.

Raíz del error cuadrático medio (RMSE). Es un tipo de desviación estándar generalizada la cual se calcula como sigue:

$$RMSE = \sqrt{\frac{SCE}{n-p-1}}$$

Donde SCE es la suma de cuadrados del residual, n es el número de observaciones (data points) y p es el número de parámetros en la ecuación.

El valor de RMSE es uno de los más importantes criterios para comparar la idoneidad de los modelos de curva de crecimiento utilizados. El mejor modelo es aquel con el valor más bajo de RMSE.

Error de predicción promedio (EPP). El error de predicción promedio es una manera en la cual es posible identificar aquellos modelos que subestiman o

a aquellos que lo sobreestiman, siendo negativos los que subestiman y positivos los que sobreestiman al realizar el cálculo pertinente.

$$EPP = \sum \left(\frac{Po - Pe}{Po} \right) * 100/n$$

Dónde: Po es el peso observado, Pe es el peso estimado y n el número total de datos. El modelo con el menor valor se consideró como de mejor ajuste.

Varianza del Error de Predicción (VEP). Es también útil el cálculo de la varianza del error de predicción, la cual entre mayor sea el valor indica menor ajuste – o menos exactitud- por lo que el modelo con el menor valor se consideró como de mejor ajuste.

$$VEP = \sum_{i=1}^n \frac{(Pe - Po)^2}{n}$$

Error porcentual absoluto medio (MAPE). Es un indicador del desempeño de un pronóstico que mide el tamaño del error (absoluto) en términos porcentuales.

$$MAPE = \sum_{i=1}^n \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{y_t} * 100$$

El modelo con el menor valor se consideró como de mejor ajuste.

Bias. El Bias es una medición de la “exactitud” del sistema de medición y representa al error sistemático del sistema. Es la contribución al error total debido a los efectos combinados de todas las fuentes de variación, conocidas o

desconocidas. Estadístico semejante al MAD (desviación media absoluta); sin embargo, no considera los valores absolutos a diferencia del mencionado.

$$Bias = \frac{\sum_{i=1}^n (y_t - \hat{y}_t)}{n}$$

Donde y_t valor observado, \hat{y}_t valor estimado y n el número de observaciones.

Cuando el Bias es igual a cero se toma la hipótesis nula y cuando es diferente de cero se rechaza la hipótesis nula.

Error promedio absoluto. (AAE)

Coefficiente de concordancia y correlación (CCC). Mide de manera conjunta la exactitud y precisión del modelo.

$$CCC = \frac{2 \sigma_{po,pe}^2}{\sigma_{po}^2 + \sigma_{pe}^2 + (\bar{y}_{po} - \bar{y}_{pe})^2}$$

El coeficiente de concordancia y correlación tomará valores del 0 al 1 (Lin, 1989, Khan *et al.*, 2012).

Para validar la exactitud en las precisiones, se propone el análisis de correlación entre los valores predichos y los observados, un análisis de correlación simple; para validar la precisión se propone una análisis de regresión para validar la capacidad de predicción de los MNL, se analizó la relación lineal entre el pe vs po a partir de la correlación entre ambos (Y) y el análisis de regresión con base en el modelo: $P_{do} = \beta_0 + \beta_1 P_{de}$, donde, β_0 es el intercepto y β_1 es la pendiente o tasa de cambio del po, por cada unidad de cambio en el pe.

Coeficientes de regresión

Los coeficientes de regresión son valores constantes dentro de una ecuación que representan características específicas de modelo de regresión no lineal. A continuación, se explican de manera puntual cada uno de los coeficientes de regresión que participan en los modelos a analizar para el crecimiento animal de ovinos. Los modelos mencionados contienen 3 o 4 parámetros los cuales son variables que permiten reconocer, dentro de un conjunto de elementos, a cada unidad por medio de su correspondiente valor numérico. El parámetro está formado por una función establecida sobre los valores numéricos de una comunidad.

El parámetro c presenta un gran impacto en los modelos matemáticos presentados ya que al ser el exponente al cual se eleva *Euler* logra crecer o decrecer grandemente a la variable dependiente. Situados de manera específica en el fenómeno de análisis, este parámetro representa la tasa de madurez del animal en cada punto de la curva e indica la velocidad de crecimiento en el sentido de alcanzar el peso asintótico a partir del peso inicial. Entre mayor sea el valor del parámetro (también llamado K o β_2) más rápido va a llegar al peso adulto el animal. Animales con un alto valor de c presentan madurez precoz en comparación con individuos de valores más bajos de c y de peso inicial semejante. Debido a la pequeña variación en el peso al nacimiento, la variación entre los valores de K representa, con buena precisión, las variaciones en la velocidad relativa con que el animal crece (Malhado, *et al.*, 2011).

En la mayoría de las razas, las tasas de crecimiento expresadas en gramos por día, estimadas por el modelo, son mayores para machos que para hembras. Con base a esto, se deduce que los machos crecen a una tasa mayor que las hembras teniendo en el mismo valor de t , un peso adulto mayor. El parámetro c da la curva relativa a la tasa de crecimiento en $\text{kg kg}^{-1} \text{ t}^{-1}$.

Otro de los parámetros que se incluye en el modelo es el llamado a , el cual, matemáticamente hablando, afecta al modelo de manera multiplicativa, teniendo una participación regular el cambio del parámetro en la variable dependiente. En este sentido matemático, influye con menor intensidad que el parámetro k el cual tiene un sentido exponencial. Dentro del fenómeno en análisis, el parámetro a es una estimación del valor asintótico del animal o peso adulto en kilogramos. El parámetro a no es necesariamente el mayor peso que el animal consigue, sino el peso medio al que se tiende a la madurez independientemente de las variaciones estacionales.

En los modelos matemáticos, el valor del parámetro b , tiene un peso regular en la afectación del cálculo de la variable dependiente, ya que participa en el producto con el exponencial, lo que se traduce que valores altos o bajos de tal parámetro se ven altamente neutralizados si el resultado del exponencial es menor a la unidad; sin embargo, si es mayor a este valor, el parámetro b afecta en mayor dimensión. En el análisis del crecimiento animal, en los modelos de análisis, el valor de b es un parámetro importante que representa la tasa de madurez del animal en cada punto de la curva e indica la velocidad de crecimiento para alcanzar el peso asintótico. En muchas ocasiones, este valor

se expresa en porcentaje y representa la velocidad de crecimiento. El parámetro B representa el grado de madurez del animal en el momento del nacimiento. Valores altos indican bajos grados de madurez al nacimiento. De acuerdo con Freitas (2005), el parámetro B no posee interpretación biológica, pero es importante para modelar la curva sigmoidea desde el nacimiento ($t=0$) hasta la edad adulta ($t \rightarrow \infty$) (Parés, *et al.*, 2014).

Otro parámetro de uso en aquellos modelos de 4 parámetros es llamado *M*. Este parámetro en sentido matemático afecta de manera exponencial a la variable dependiente, lo que se interpreta como importante en las ecuaciones no lineales. Dentro del análisis del peso en ovinos, *m* es el parámetro de forma relativo al punto de inflexión en el cual se vuelve la función de la tasa de crecimiento creciente a decreciente. En otras palabras, *M* es el parámetro que da forma a la curva al indicar dónde se produce el punto de inflexión (Hossein-Zadeh, 2015).

Continuando con los coeficientes de regresión, se presenta la descripción matemática de los modelos de crecimiento, parámetros biológicos y evaluadores de crecimiento en el cuadro 2.

Cuadro 2. Indicadores en modelos no lineales.

Modelo	Peso a la inflexión	Edad de inflexión	Tasa de maduración	Edad a la maduración	Grado de madurez
Von Bertalanffy	$y_i = \frac{8a}{27}$	$t_i = \frac{\ln(3b)}{k}$	$V_C = 3ky\left[\left(\frac{a}{y}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right]$	$\frac{1 - \sqrt[3]{\frac{y}{a}}}{\ln\left(\frac{y}{b}\right)}$	$u = \frac{y}{a}$
Verhulst	$y_i = \frac{a}{2}$	$t_i = \frac{\ln(b)}{k}$	$V_C = ky\left(1 - \frac{y}{a}\right)$	$\frac{\ln\left(\frac{a-y}{y-b}\right)}{k}$	$u = \frac{y}{a}$
Logistic	$y_i = \frac{a}{2}$	$t_i = \frac{-\ln(2^{\frac{1}{m}} - 1)}{k}$	$V_C = mka\left(\frac{e^{-kt}}{1 + e^{-kt}}\right)$	$-\frac{\ln\left[\left(\frac{a}{y}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right]}{k}$	$u = \frac{y}{a}$
Gompertz	$y_i = \frac{a}{e}$	$t_i = \frac{\ln(3b)}{k}$	$V_C = ky \ln\left(\frac{a}{y}\right)$	$\frac{\ln\left(\frac{y}{a}\right)}{\ln\left(\frac{y}{-b}\right)}$	$u = \frac{y}{a}$
Brody	----	----	$V_C = ka\left(1 - \frac{y}{a}\right)$	$\frac{\ln\left(\frac{a-y}{ba}\right)}{k}$	$u = \frac{y}{a}$
Ricards	$y_i = \frac{a}{(n+1)^{1/n}}$	$t_i = \frac{-\ln(n/b)}{k}$	---	----	$u = (1 + e^{-kt})^{-\frac{1}{n}}$

Siendo a, b, m y k parámetros propios de la función, n total de datos (Ben Hamouda y Atti, 2011; Lupi, *et al.*, 2015).

Pruebas estadísticas para validar los coeficientes de regresión

Para validar los coeficientes de regresión es importante el uso de varias pruebas estadísticas como las que se citan a continuación (Acuña, 2010; Rivas y López, 1987; Santibáñez, 2017). Se sugiere el planteamiento de hipótesis (Ho al menos un parámetro es diferente de cero). Intervalo de confianza:

$$\hat{\theta}_1 \pm t_{0.025} \sqrt{\hat{\sigma}^2 c_{ii}}$$

$$c_{ii} = \frac{\text{var } \hat{\theta}_i}{\sigma^2}$$

$$\hat{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^t$$

T de Student:

$$T = \frac{p - 0}{\text{error estándar}}$$

$$H_0: a = 0. H_a: a \neq 0$$

$$T_{\text{calc}} > T_{\frac{\alpha}{2}, 95}$$

Prueba de Wald:

$$H_0: a = 0. H_a: a \neq 0$$

$$\hat{H}_{1 \times 2} = \frac{\partial h}{\partial \theta^T} = [1, 0]$$

$$W = \frac{h^T(\hat{\theta})(\hat{H}\hat{C}H^T)^{-1}h(\hat{\theta})}{q\hat{\sigma}^2}$$

Coeficiente de verosimilitud:

Estimador de la varianza del modelo completo: $\hat{\sigma}^2$

Estimador de la varianza del modelo reducido por la hipótesis nula: $\tilde{\sigma}^2$

Modelo completo: $Máx. verosimilitud = n * \log \frac{CME}{n}$

$$c \approx 1 + \frac{q}{n-p} F_\alpha$$

Prueba basada en la normalidad asintótica del estimador de mínimos cuadrados:

$$\hat{\theta} \sim A N_p(\theta, \sigma^2 C)$$

$$S = \frac{(\hat{t} - \hat{t}_0)^T \hat{C}_{22}^{-1} (\hat{t} - \hat{t}_0)}{q\hat{\sigma}^2}$$

Curvas de crecimiento

Las curvas de crecimiento pueden tener varios comportamientos; en el caso del crecimiento animal destacan la curva sigmoide y la curva de crecimiento constante, las cuales expresan la variación del peso en función del tiempo (habitualmente expresados en kilogramos y en días, respectivamente). La curva sigmoide posee una forma de doble curva la cual muestra una progresión temporal teniendo niveles bajos al inicio para de manera posterior acercarse a un clímax o punto máximo, todo en función del tiempo. La transición se da teniendo una aceleración intermedia. Al alcanzar el punto máximo se tiende a dar una estabilización la cual hace que la curva se comporte constante semejante a una recta, pudiendo tener declinación. Las tres etapas de la curva son llamadas fase exponencial, fase lineal y fase de senescencia. En resumen, la curva sigmoidea representa un crecimiento lento, luego rápido hasta equilibrarse.

La curva de crecimiento constante, a diferencia de las sigmoide, presenta una aceleración constante en el crecimiento en todos, o la mayoría, de los momentos marcados por el tiempo. Desde el inicio, empieza a representar la ganancia de peso hasta ir logrando el aumento, todo esto de manera constante, hasta alcanzar un punto máximo.

El modelo Brody, en su curva de crecimiento presenta valores bajos de peso cuando el tiempo tiende a cero; no obstante, al aumento de t tiende a crecer exponencialmente logrando valores adecuados de peso en la curva decrecimiento. Se puede interpretar tal curva como con crecimiento constante debido a que el aumento al inicio no es tan lento como en otros momentos. El modelo de Von Bertalanffy otorga valores al peso, cuando $t=0$ medio,

adecuándose de mejor manera a aquellos datos que poseen valores de peso inicial no mínimos ni máximos, sino más bien medios siguiendo así el comportamiento de una curva de crecimiento constante. De forma general, los diferentes estudios realizados en terneros indican que la función de Richards ofrece la mejor modelización de las curvas de crecimiento y la función de Brody presenta un buen ajuste cuando se trata de animales con edades por encima de los seis meses (Brown, *et al.*, 1976). Otros autores señalan que la función de Brody sobrestima el valor del peso adulto, en tanto que, la función logística lo subestima cuando es comparada con las funciones de Richards y Van Bertalanffy (León, *et al.*, 2006). El modelo de Brody considera la velocidad de crecimiento proporcional al crecimiento que queda por efectuar, por lo tanto, las tasas de crecimiento disminuyen inversamente proporcional al peso y la edad.

Siguiendo con comportamientos semejantes, el modelo Verhulst, aunque es de la familia de modelos no lineales, tiende a contar con un crecimiento lineal con curvatura en ciertos momentos, posee valores bajos del peso cuando el tiempo es cercano a cero y experimenta un máximo para después descender y establecerse.

Tanto el modelo Logístico como el Gompertz tienden a adecuarse a datos de crecimiento que poseen valores más altos de peso cuanto t tiene valores pequeños o cercanos a cero; al paso del tiempo ambos modelos crecen de manera exponencial sin contar con tendencia diferente a los modelos no lineales tradicionales. El modelo Gompertz posee un claro comportamiento sigmoideal al contar con bajos valores del peso al tiempo cero, para de manera

posterior experimentar un máximo y después baja un poco para establecerse de manera lineal y el modelo logístico es la clara representación de una curva sigmoidea. En el modelo logístico, se presenta una curva simétrica respecto del punto de inflexión, alcanzando un 50% del valor asintótico. En un primer momento posee una aproximación a una función exponencial de crecimiento constante, y en un segundo momento se aproxima a la función Brody.

Los modelos Meloun, I, II, III y IV, suelen tener un comportamiento más irregular en la curva de crecimiento, adecuándose a la curva de crecimiento sigmoideal ya que el crecimiento no se da de manera constante, teniendo valores de aceleración variantes en todos los momentos del crecimiento.

El modelo de Richards es una función que posee características de mayor generalidad entre cualquier comportamiento de crecimiento. La parte más importante del mismo es la flexibilidad del punto de inflexión que depende del parámetro M , logrando una interpretación real biológica adecuada a cada fenómeno en específico (Goyache, 2005).

Indicadores de crecimiento

En la producción animal el parámetro de peso adulto (a) y la tasa de crecimiento (k) son considerados los dos parámetros más importantes derivados de la curva de crecimiento. El crecimiento en las primeras etapas de vida de cualquier ser vivo tiende a ser acelerado al logrado en la edad adulta, expresando así una curva sigmoidea ascendente. Conforme el individuo se va desarrollando, la tasa de crecimiento varía produciéndose alteraciones y

cambios en la curvatura identificando con claridad el punto de mayor tasa de crecimiento, llamado punto de inflexión. De manera posterior a este punto, el crecimiento presenta una disminución gradual mostrando una tasa de crecimiento lenta continuando hasta que se estabiliza el crecimiento, lo que coincide con la asíntota horizontal.

La etapa de auto aceleración del crecimiento se identifica como el aumento de inclinación dándose en un primer segmento de una curva de crecimiento para de manera posterior presentarse la fase de desaceleración del crecimiento, la cual se caracteriza como una disminución de la pendiente dando así lugar al patrón de la curva sigmoidea. Por esto, el patrón típico de crecimiento sigue la forma de una curva sigmoidea.

En general, se estudian las curvas de crecimiento mediante el ajuste de funciones no lineales que permiten sintetizar información de todo el período de la vida de los animales en un pequeño conjunto de parámetros matemáticos con interpretación biológica. Estos modelos no lineales de crecimiento poseen varias características como el punto de inflexión, la asíntota horizontal, contar con valores lógicos desde el punto de vista biológico, así como alta calidad del ajuste y facilidad de convergencia.

La estimación de los parámetros genéticos de los coeficientes de las curvas nos permite comprobar la capacidad de estos para ser introducidos en el programa de cría como criterios de selección. Estos parámetros, y especialmente su significado biológico, son informativos para los criadores, ya que permiten la inferencia de información económica relevante en relación con

el punto de inflexión y la madurez, información que no es accesible a partir del análisis de las características de crecimiento simples (Duarte y De Ordaz, 2016).

A la velocidad de crecimiento ocasionalmente se conoce como la ganancia de peso diario y expresa en un intervalo específico el incremento de peso que se puede interpretar como los kilogramos ganados por cada kilogramo de peso actual. La velocidad de crecimiento es diferente en las distintas etapas del crecimiento, en un primer momento, desde el nacimiento hasta la pubertad se tiene aceleración en la velocidad de crecimiento llegando al punto de inflexión, que suele coincidir con la pubertad, momento en el cual la velocidad de crecimiento es máxima. En un segundo paso se da una fase de retardo hasta la madurez, momento en el cual la velocidad empieza a disminuir paulatinamente.

A la velocidad específica de crecimiento también se le llama tasa de crecimiento, la cual indica la velocidad de crecimiento con relación al peso vivo.

MATERIALES Y MÉTODOS

En el contexto del segundo objetivo, se analiza la aplicación de los modelos no lineales en el crecimiento de ovinos. Se revisaron 60 artículos publicados por distintos autores en diversas revistas en las cuales reportaron sus avances para encontrar el modelo con mejor ajuste a varias razas de ovinos, tomando en cuenta que se analizaron a más de 20 razas (se encuentran consideradas las razas Awassi, Babarine, Baluchi, Blackbelly, Segureño, Dorper, Hampshire, Hemsin, Iranian Guilan, Karagouniko, Konya Merino, Mehraban Iranian, Mengali, degali, Morada Nova, Morkaram, Pelibuey, Rambouillet, Santa Inés, Scottish Blackface, Suffolk, Texel, West African Dwarf, así como ovinos con características específicas – nacidos en otoño, primavera, en parto sencillo o doble-) en algunos casos considerando los dos sexos por separado, con estudio en los siguientes modelos: AMM (Animal Modern Model), ANN (Animal Neural Networks), Bertalanffy, Brody, Gompertz, Logístico, Meloun (I, II, III y IV), Morgan Mercer Flodin, Richards, Exponencial, Gamito, Janoschek, Mitscherlich, Exponencial Negativo, Schnute, Verhulst y Weibull, todos estos no lineales.

Las bases de datos utilizadas contenían gran cantidad de datos ya que algunos consideraron varias repeticiones, o bien, diferenciaron el comportamiento de los machos a las hembras. El promedio de datos tomados por artículo es de 116,190, teniendo un mínimo de 773 datos y un máximo de 1,296,120 datos. No todos los artículos expresaban la cantidad de datos

utilizados en sus análisis (únicamente 18), sin embargo se puede considerar el promedio como válido considerando que hay un 30% de artículos con este valor (muestra aceptable).

Se utilizaron los siguientes 19 métodos para elegir el mejor modelo: coeficiente de determinación, cuadrado medio residual, desviación media absoluta, porcentaje de convergencia, Criterio de información Akaike, criterio de información Bayesiano, raíz del error de predicción promedio, coeficiente de determinación de predicción, coeficiente de determinación ajustado, raíz del error cuadrático medio, estadístico Durbin Watson, error cuadrático de predicción medio, error de predicción promedio, número de interacciones, varianza del error de predicción, residual del error cuadrático, error porcentual absoluto medio, BIAS, error promedio absoluto y otros.

El Cuadro 3 compara los distintos criterios para la selección, ajuste y predicción que utilizaron los diversos autores para poder elegir aquel modelo más adecuado a la raza de estudio. La mayoría de los autores reportaron en sus escritos el uso del coeficiente de determinación R^2 , el criterio de información Akaike, el error cuadrático medio y el estadístico Durbin Watson para la elección del mejor modelo. Otros criterios también fueron utilizados como se cita en el pie de cuadro, sin embargo presentaron menor uso entre los investigadores, por ejemplo el cuadrado medio residual, la desviación media absoluta, el porcentaje de convergencia, la raíz del error cuadrático medio, el residual del error cuadrático, etc.

El cuadro 4 compara los modelos utilizados por los autores, teniendo en la mayoría de los casos varios para comparar

Cuadro 3. Comparación de autores, razas y modelos por criterios de selección.

#	Autor de referencia	Raza	Mejor modelo	Criterios de selección																			
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	Topal, et al. 2004	Morkaram	Gompertz	X	X																		
2	Topal, et al. 2004	Awassi	Bertalanffy	X	X																		
3	Malhado, et al. 2009	Dorper con Brazilian breeds	Logistic	X	X	X	X																
4	Kariuki, et al. 2010	Dorper	AMM					X	X														
5	Ben Hamouda, et al. 2010	Babarine	Brody	X																			
6	De Andrade Souza, et al. 2013	Morada nova	Meloun IV	X				X	X	X	X												
7	Acioli Da Silva, et al. 2011	Santa Ines	Logistic	X	X	X	X																
8	Hossein Zadeh, 2011	Iranian Guilan	Richards	X				X	X			X	X	X									
9	Bathaei, et al. 1996	Mehraban Iranian Fat Tailed	Brody																			X	
10	Campos de Oliveira, et al. 2010	Ovinos Cruzados	Bertalanffy																			X	
11	Keskin, et al. 2009	Konya Merino	Gompertz																				
12	Lupi, et al. 2015	Segureño	Logistic	X																			

Continuación Cuadro 3

#	Autor de referencia	Raza	Mejor modelo	Criterios de selección																			
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
13	Hossein Zadeh, et al. 2016	Iranian Guilan hembra	Richards					X	X		X		X	X									
14	Hossein Zadeh, et al. 2016	Iranian Guilan macho	Brody					X	X		X		X	X									
15	Masood Tariq, et al. 2013	Mengali Sheep Breed of Balochistan	Morgan Mercer Flodin	X				X	X		X		X										
16	Braga Lobo, et al. 2006	Santa Ines	Richards	X	X																	X	
17	Cazonatto, et al. 2017	Karagouniko	Logistic	X				X	X				X										
18	Rocha Sarmiento, et al. 2006	Santa Ines	Richards	X	X																	X	
19	Lupi, et al. 2015	Segureño	Logistic																				
20	Lupi, et al. 2015	Segureño	Bertalanffy	X	X																	X	
21	Lewis, et al. 2002	Suffolk	Gompertz																				X
22	Canul, et al. 2019	Blackbelly	Meloun I	X				X					X		X		X		X				
	Canul, et al. 2019	Blackbelly	Meloun III	X				X					X		X		X		X				
	Canul, et al. 2019	Blackbelly	Mitscherlich	X				X					X		X		X		X				

Continuación Cuadro 3

#	Autor de referencia	Raza	Mejor modelo	Criterios de selección																			
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
23	Canul, et al. 2019	Dorper	Meloun I	X				X						X		X		X					
	Canul, et al. 2019	Dorper	Meloun III	X				X						X		X		X					
	Canul, et al. 2019	Dorper	Mitscherlich	X				X						X		X		X					
24	Canul, et al. 2019	Hampshire	Bertalanffy	X				X						X		X		X					
25	Canul, et al. 2019	Katahdin	Bertalanffy	X				X						X		X		X					
26	Canul, et al. 2019	Pelibuey	Bertalanffy	X				X						X		X		X					
27	Canul, et al. 2019	Rambouillet	Meloun I	X				X						X		X		X					
	Canul, et al. 2019	Rambouillet	Meloun III	X																			
	Canul, et al. 2019	Rambouillet	Mitscherlich	X																			
28	Canul, et al. 2019	Suffolk	Bertalanffy	X				X						X		X		X					
29	Kopuzlu, et al. 2014	Hemsin	Brody	X																		X	
30	Tariq, et al. 2011	Mengali	Gompertz	X										X									
31	Lambe, et al. 2006	Texel	Richards	X				X															
32	Lambe, et al. 2006	Scottish Blackface	Richards	X				X															
33	Bahreini, et al. 2014	Baluchi	Brody		X																		
34	Bahreini, et al. 2010	Baluchi	ANN	X	X	X																X	X
35	Aman Ullah, et al. 2013	Commercial Sheep	Bertalanffy	X	X	X																X	X

Cuadro 4. Modelos considerados por los distintos autores.

#	Autor referencia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	Acioli Da Silva, et al. 2011				X	X			X			X												
2	Aman Ullah, et al. 2013				X	X			X			X												
3	Bahreini, et al. 2010			X	X	X			X			X								X				
4	Bahreini, et al. 2014				X	X			X			X								X				
5	Bathaei, et al. 1996					X																		
6	Ben Hamouda, et al. 2010				X	X			X			X												
7	Braga Lobo, et al. 2006				X	X			X			X								X				
8	Campos de Oliveira, et al. 2010				X																	X		
9	Canul, et al. 2019				X				X			X	X		X		X							
10	Cazonatto, et al. 2017				X	X			X			X								X				
11	De Andrade Souza, et al. 2013							X	X			X	X	X	X	X	X				X			
12	Gbangboche, et al. 2008				X	X			X			X												
13	Hossein Zadeh, 2011				X	X			X			X							X	X				
14	Hossein Zadeh, et al. 2016				X	X			X			X							X	X				
15	Kariuki, et al. 2010	X	X																					
16	Keskin, et al. 2009								X		X	X												
17	Kopuzlu, et al. 2014				X	X			X	X		X							X	X				
18	Lambe, et al. 2006						X		X		X	X								X				
19	Lewis, et al. 2002								X															
20	Lupi, et al. 2015				X				X			X											X	
21	Lupi, et al. 2015											X												
22	Lupi, et al. 2015				X	X			X			X											X	
23	Malhado, et al. 2009				X	X			X			X								X				
24	Masood Tariq, et al. 2013				X				X			X						X		X				X
25	Rocha Sarmiento, et al. 2006				X	X			X			X								X				
26	Tariq, et al. 2011								X											X				
27	Topal, et al. 2004				X	X			X			X												

1. Animal simple model (AM)
2. Animal modern model (AMM)
3. Artificial Neural networks (ANN)
4. Bertalanffy
5. Brody

6. Exponential
7. Gamito
8. Gompertz
9. Janoschek
10. Lineal
11. Logístico
12. Meloun I
13. Meloun II

14. Meloun III
15. Meloun IV
16. Mitscherlich
17. Morgan- Mercer- Flodin
18. Negative Exponential
19. Richards
20. Schnute

21. Splines
22. Verhulst
23. Weibull

Como se puede observar en el cuadro 4, de los 27 artículos estudiados, solo el 7.4% de los casos utilizó un mínimo de 6 modelos para comparar, el 18.5% comparó 6 modelos, el 25.9% 5 modelos –el cual representa la mayor frecuencia de uso de modelos-, 4 modelos fueron utilizados por el 22.2% de los investigadores, mientras que 3 únicamente por el 3.7%. 2 modelos presentan el mismo porcentaje de uso que más de 6 modelos. Cuatro de los artículos revisados, sus autores previamente utilizaron los procedimientos pertinentes para elegir el mejor modelo, ya que presentaron únicamente un modelo como el mejor para la raza de ovinos estudiados por ellos en el presente artículo.

Los modelos que fueron citados la mayor cantidad de veces fueron Gompertz, Logistic, Bertalanffy y Brody, en orden descendente. Otros más como el Animal Simple Model, el Animal Modern Model, el Artificial Neural Network, así como el Exponencial, el Gamito, el Janoschek, el Meloun II y IV, el Morgan Mercer Flodin, el Schnute y el Weibull fueron utilizados únicamente en una ocasión, buscando específicamente alguna aportación de tales modelos a las razas en cuestión apoyándose de conocimientos previos.

De igual manera, se puede observar la cantidad de animales utilizados para poder realizar el experimento o investigación deseada, así como en algunos casos la cantidad de observaciones hechas para lograr el cometido dicho. Varios de los artículos estudiados para este escrito tomaron gran cantidad de animales para la muestra, logrando así una mejor certeza al momento de elegir el modelo más adecuado, tal es el caso de Lupi, *et al*, (2015) el cual estudió el cordero Segureño,

de Canul con Katahdin, ascendiendo a más de 100,000 observaciones para poder encontrar el mejor modelo. En otros artículos, los autores tomaron una menor cantidad de datos u observaciones, ya sea por la falta de acceso a la información o consideraron conveniente y suficiente el número tomado para el análisis, tal es el caso de Topal en su estudio de la raza Awassi y de la Morkaram, en las cuáles tomó únicamente 14 animales como muestra.

En algunos artículos el autor hace distinción al sexo, mientras que, en otros casos, no se hace referencia a diferencias de sexo en la elección del mejor modelo. Como se puede observar en el cuadro número 5, algunos de los autores citados analizaron la misma especie de ovino. Bahreini y Ashgar (2010) diferenció claramente los machos de las hembras de su estudio, escogiendo en ambas ocasiones el modelo Brody como aquel con el mejor ajuste, sin embargo, se puede notar que los machos tienen el valor del parámetro a en 6 unidades mayor al de las hembras, indicando que el peso de partida de los machos es mayor en mismas circunstancias a las hembras. Kopuzlu, *et al.*, (2014) refuerza tal afirmación, así como Hossein Zadeh en el 2011 y 2014 en su estudio con corderos iraníes y Gbangboche, *et al.*, (2008). Este último toma como elegido el modelo de Richards en la mayoría de sus análisis, presentando un parámetro m como punto de inflexión negativo. Los modelos con 3 parámetros fueron los mayormente utilizados, ya que si bien el ajuste puede ser bueno también con modelos con mayor cantidad de parámetros, el objetivo es el uso de modelos lo menor complejos posibles. En el Cuadro 5, se presentan los valores de los parámetros ya específicamente de acuerdo con el modelo elegido.

Cuadro 5. Valor de los parámetros según el mejor modelo para las distintas razas.

#	Autor	N	n	Raza	Modelo	A	B	K	M
1	Aman Ullah, et al. 2013	---	---	Autumn Born Lambs	Brody	40.88	0.9	0.14	
2	Topal, et al. 2004	---	14	Awassi	Bertalanffy	41.7 +- 1.1b	0.52 +- 0.01d	0.01 +- .001	
3	Ben Hamouda, et al. 2010	---	695	Babarine	Brody	46.89+- 77.35	-0.085+- 0.05	0.015 +- 0.012	
4	Bahreini, et al. 2014	16650	2071	Baluchi male	Brody	47.62	0.92	0.007	
5	Bahreini, et al. 2014	---	---	Baluchi female	Brody	41.54	0.92	0.007	
6	Bahreini, et al. 2010	---	70	Baluchi	ANN (artificial neural networks)	NA			
7	Canul, et al. 2019	26055	---	Blackbelly	Meloun I	58.2+-0.94	55.52+-0.93	0.0039+-0.0001	
8	Canul, et al. 2019	---	---	Blackbelly	Meloun III	58.2+-0.94	-4.02+ - 0.01	0.0039+-0.0001	
9	Canul, et al. 2019	---	---	Blackbelly	Mitscherlich	58.2+-0.94	-12.11+ - 0.26	0.0039+-0.0001	
10	Aman Ullah, et al. 2013	---	---	Commercial Sheep	Brody	42.91	0.91	0.14	
11	Aman Ullah, et al. 2013	---	---	Commercial Sheep Male	Bertalanffy	38.95	0.48	0.2	
12	Lupi, et al. 2015	---	41330	Cordero Segureño	Logistic	34.532+- 11.38	0.026+-0.01	3.187+-1.45	
13	Lupi, et al. 2015	1296120	---	Cordero Segureño male	Bertalanffy	67.707 (0.262)	0.628(0.001)	0.009	
14	Lupi, et al. 2015	---	---	Cordero Segureño female	Bertalanffy	48.877(0.137)	0.587	0.01	
15	Lupi, et al. 2015	352031	119497	Cordero Segureño	Logistic	34.993	0.026	3.201	
16	Canul, et al. 2019	54784	---	Dorper	Meloun I	78.8+-0.77	75.2+-0.76	0.0045+-0.0001	
17	Canul, et al. 2019	---	---	Dorper	Meloun III	78.8+-0.77	-4.32+- 0.01	0.0045+-0.0001	
18	Canul, et al. 2019	---	---	Dorper	Mitscherlich	78.8+-0.77	-10.4+-0.17	0.0045+-0.0001	
19	Kariuki, et al. 2010	8922	2642	Dorper	AMM (animal modern model)	NA			
20	Malhado, et al. 2009	---	151	Dorper con Brazilian breeds	Logistic	29.35		0.0179	
21	Canul, et al. 2019	15984	---	Hampshire	Bertalanffy	61.9+-0.51	0.57+-0.01	0.0114+-0.0001	
22	Kopuzlu, et al. 2014	---	108	Hemsin male	Brody	61.9+-0.51	0.93+-0.03	0.003+-0.001	
23	Kopuzlu, et al. 2014	---	---	Hemsin female	Brody	60.79+-2.71	0.9+-0.03	0.004+-0.001	
24	Hossein Zadeh, et al. 2016	42257	---	Iranian Guilan hembra	Richards	33.07(3.71)	0.98(0.01)	0.0032(0.001)	-0.65(0.07)
25	Hossein Zadeh, et al. 2016	---	---	Iranian Guilan macho	Brody	29.07(0.3)	0.9(0.002)	0.0064(0.0001)	
26	Hossein Zadeh, 2011	57000	---	Iranian Shall male	Richards	48.8 (0.8)	0.98(0.003)	0.0035(0.0003)	-0.59(0.02)

Continuación cuadro 5...

#	Autor	N	n	Raza	Modelo	A	B	K	M
27	Hossein Zadeh, 2011	---	---	Iranian Shall female	Richards	41.51(0.45)	0.98(0.003)	0.0042(0.0002)	-0.61(0.02)
28	Cazonatto, et al. 2017	---	---	Karagouniko	Logistic	NA			
29	Canul, et al. 2019	112504	---	Katahdin	Bertalanffy	52.5+-0.16	0.58+-0.01	0.0113+-0.0001	
30	Keskin, et al. 2009	---	162	Konya Merino male	Gompertz	79.3+-1.69	2.2+-0.033	0.00558+-0.0002	
31	Keskin, et al. 2009	---	---	Konya Merino female	Gompertz	57+-0.72	2.7+-0.343	0.03+-0.00188	
32	Bathaei, et al. 1996	---	1239	Mehraban Iranian Fat Tailed	Brody				
33	Tariq, et al. 2011	---	2377	Mengali	Gompertz	36.924	2.043	0.010083	
34	Masood Tariq, et al. 2013	---	2377	Mengali Sheep Breed of Balochistan	Morgan-Mercer-Flodin	57.062+-4.66	0.004+-0.0006	1.1052+-0.0707	3.5992+-0.3289
35	De Andrade Souza, et al. 2013	---	40	Morada nova	Meloun IV	29.4372	22.4265		B3B4 0.0065
36	Topal, et al. 2004	---	14	Morkaram	Gompertz	41.4 +-1.2 b	2.06+- .05b	0.012 +- 0.001b	
37	Campos de Oliveira, et al. 2010	---	156	Ovinos Cruzados	Bertalanffy	44.787	0.5115	0.0049	
38	Canul, et al. 2019	53533	---	Pelibuey	Bertalanffy	48.6+-0.27	0.61+-0.01	0.0099+-0.0001	
39	Canul, et al. 2019	18027	---	Rambouillet	Meloun I	56.4+-0.44	51.71+-0.43	0.0072+-0.0001	
40	Canul, et al. 2019	---	---	Rambouillet	Meloun III	56.4+-0.44	-3.96	0.0072+-0.0001	
41	Canul, et al. 2019	---	---	Rambouillet	Mitscherlich	56.4+-0.44	-12.73	0.0072+-0.0001	
42	Acioli Da Silva, et al. 2011	773	162	Santa Inés	Logistic	122.2		0.00495	2.1006
43	Braga Lobo, et al. 2006	---	---	Santa Inés	Richards	54.38	-0.993	-0.00144	0.554
44	Rocha Sarmento, et al. 2006	7271	952	Santa Inés	Richards	24.5494	0.3401	0.0171	4.6391
45	Lambe, et al. 2006	7559	231	Scottish Blackface	Richards	38.27	0.329	40.56	0.397
46	Aman Ullah, et al. 2013	---	---	Single Born Lambs	Brody	41.13	0.9	0.14	
47	Aman Ullah, et al. 2013	---	---	Spring Born Lambs	Bertalanffy	39.11	0.49	0.22	
48	Lewis, et al. 2002	---	1934	Suffolk	Gompertz				
49	Canul, et al. 2019	9129	---	Suffolk	Bertalanffy	64.9+-0.46	0.58+-0.01	0.00114+-0.0001	
50	Lambe, et al. 2006	7550	240	Texel	Richards	43.05	0.368	32.16	-0.022
51	Aman Ullah, et al. 2013	---	---	Twin Born Lambs	Bertalanffy	36.1	0.49	0.21	
52	Gbangboche, et al. 2008	5274	889	West African Dwarf male	Brody	47.1+-1.93	0.957+-0.0004	0.0025	
53	Gbangboche, et al. 2008	---	---	West African Dwarf female	Brody	45.4+-1.68	0.967+-0.0004	0.0024	

Canul al estudiar el Blackbelly, sugiere tres modelos con igualdad de bondad en el ajuste y predicción, Meloun I, Meloun III y Mistcherlich; estos tres modelos tienen un mismo valor de a y de k sin embargo difieren en su valor del parámetro b , lo que nos indica una diferencia en el valor de integración, siendo negativo en los dos últimos y positivo en Meloun I. Lupi, al estudiar en varias ocasiones al Cordero Segureño, eligió el modelo de Bertalanffy y otras veces el Logistic como el más adecuado, sin embargo es importante notar que los valores de los parámetros en Logistic no difieren en mucho en ambas investigaciones, más en la elección de Bertalanffy el parámetro k disminuye, dando a entender, que al menos en esa población con las características propias de ella, la rapidez de crecimiento relativo fue menor.

En el caso del borrego Santa Inés, diversos autores lo estudiaron, Acioli (2011) eligió el Logistic, con un valor del parámetro a muy alto (122.2) indicando así el peso asintótico esperado. Anteriormente, tanto como Braga en el 2006 había analizado los mismos ovinos, seleccionando como mejor modelo a Richards contando con un valor negativo de tasa de crecimiento (-0.00144) así como Rocha (el cual también identificó como mejor Richards), el cual a diferencia del anterior, calculó como positivo el valor de la tasa de crecimiento medido en $\text{Kg} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{t}^{-1}$

Lewis, *et al.*, (2002) y Canul, *et al.*, en el 2019 analizaron el ovino Suffolk, difiriendo a la elección del mejor modelo, pudiendo notar que a pesar contar con muestras semejantes, su información fue diferente (Canul enuncia la cantidad de observaciones utilizadas de 9129 y Lewis de animales analizados 1934). Aman en el 2013, estudio por separados varios corderos con características específicas,

tales como nacidos en otoño y en primavera, nacidos solos o con un gemelo, logrando así establecer diferencias entre ellos. En el caso de los nacidos en otoño siguen un modelo Brody (el cual sugiere un crecimiento más lento pero constante) contra los nacidos en primavera que el mejor modelo fue Bertalanffy (con un crecimiento rápido mas no constante), situación semejante a los nacidos solos, modelo Brody, y los nacidos con gemelo, modelo Bertalanffy, lo que sugiere un crecimiento con aceleración constante al nacer único.

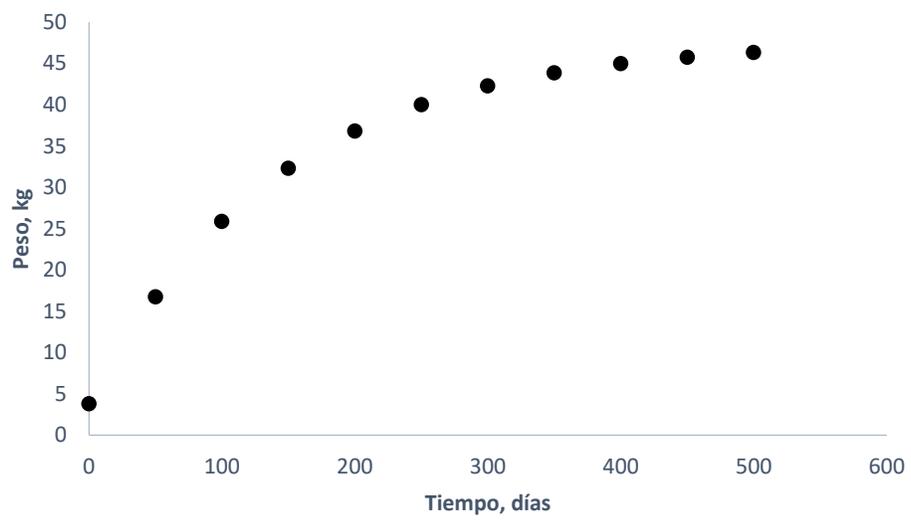
Brody fue el modelo más aceptado como ideal (12 presencias) seguido de manera inmediata por el modelo de Bertalanffy (11 presencias) seguida por Richards con 7 ocasiones nombrado, esto a diferencia de ciertos modelos, como el Morgan Mercer Flodin, Meloun IV o los propuestos AMM y ANN resultaron ideales en una única ocasión, demostrando que se adaptan a situaciones muy específicas de la población. El modelo MMF (Morgan Mercer Flodin) se ajustó de una manera excelente para el cordero Mengali de la región de Balochistan en Pakistán, descendiente de ovejas y carneros, teniendo un alto coeficiente de determinación de 99.91% y los más bajos valores del criterio Akaike y Bayesiano, además del error. Los modelos AMM y ANN fueron aceptados por Kariuki en el 2010 para la raza Dorper y por Bahreini para la raza Baluchi respectivamente. Kariuki decidió la pertinencia del modelo AMM en la raza Dorper considerando el crecimiento del borrego como un modelo de regresión aleatoria, demostrando la posibilidad de la aplicación de los modelos aleatorios para la rutina genética de evaluación, para en este caso, el borrego Dorper en Kenya. Bahreini en el 2010 decidió proponer el modelo ANN (Artificial Neural Networks) como una alternativa

a las técnicas de regresión estadística tradicional para la predicción del crecimiento del borrego Baluchi, comparando contra los modelos tradicionales no lineales, como el caso de Bertalanffy, Gompertz y Logistic, identificando con los criterios de selección, como el coeficiente de determinación, la desviación media absoluta, cuadrado medio de error así como el error porcentual medio y el Bias, la mejoría al utilizar el modelo sugerido como ANN.

En el Cuadro 5 se menciona el valor de los parámetros de acuerdo con el modelo escogido como mejor y a la raza de estudio, siendo N el total de observaciones, n el total de animales considerados, a el peso asintótico, b la constante de integración y k la tasa de crecimiento. En algunos modelos se incluye el parámetro m el cual es el punto de inflexión.

A continuación se pueden observar gráficas para indicar el tipo de tendencia que pudieran tener los modelos, éstas gráficas fueron seleccionadas de aquellos estudios que se consideraron como los más adecuados con base a la variable raza. Los modelos graficados, según el orden de aparición, son aquellos que tengan tendencia al crecimiento exponencial, siendo el modelo Brody, el modelo Bertalanffy y el Meloun ejemplos de un comportamiento exponencial. .

La gráfica 1 representa el comportamiento de la raza Baluchi siendo ajustada por el mejor modelo según lo estimado y seleccionado. Se puede observar el incremento del peso del ovino el cual se distingue claramente tendencia al alta. Los parámetros de este modelo son, 47.62, 0.92 y 0.007, correspondientes a A , B y k respectivamente.



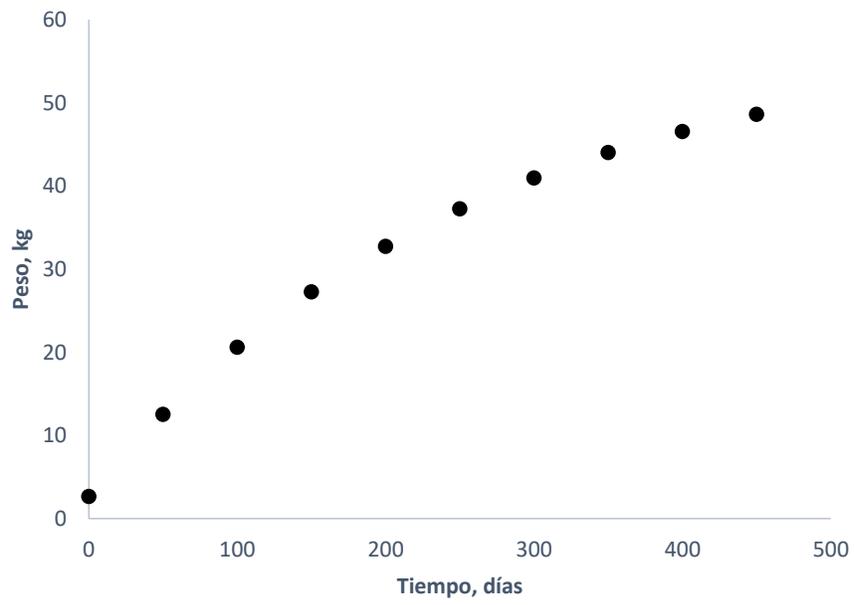
Grafica 1. Curva de crecimiento raza Baluchi modelo Brody

Al igual que la gráfica mencionada, gráfica 1, se puede observar la siguiente, gráfica número 2, la cual tiene de manera semejante un crecimiento constante, respondiendo a un modelo Bertalanffy. La gráfica 2 posee un comportamiento especial que se puede detectar en el aumento “notorio” de los segundos valores con respecto al primer valor graficado, sin embargo, la diferencia es tan clara debido a que los días posteriores no experimentan un aumento tan amplio, siendo pocos los kilogramos de diferencia con el aumento de t . Los valores de los parámetros utilizados en el modelo del mejor ajuste, Bertalanffy, son 38.95, 0.48 y 0.2 correspondientes a a , b y k .

La gráfica 3 responde al modelo Meloun I para la raza Blackbelly, en la cual, con los datos graficados, tiene un comportamiento creciente constante semejante en pocos datos a una tendencia lineal (sin olvidar que la función exponencial bajo ciertas circunstancias se puede comportar como una línea). Los valores de los parámetros tomados en cuenta en este modelo por el autor fueron, $a=58.2$, $b=55.52$ y $k=0.0039$.



Gráfica 2. Curva de crecimiento de raza Commercial sheep modelo Bertalanffy

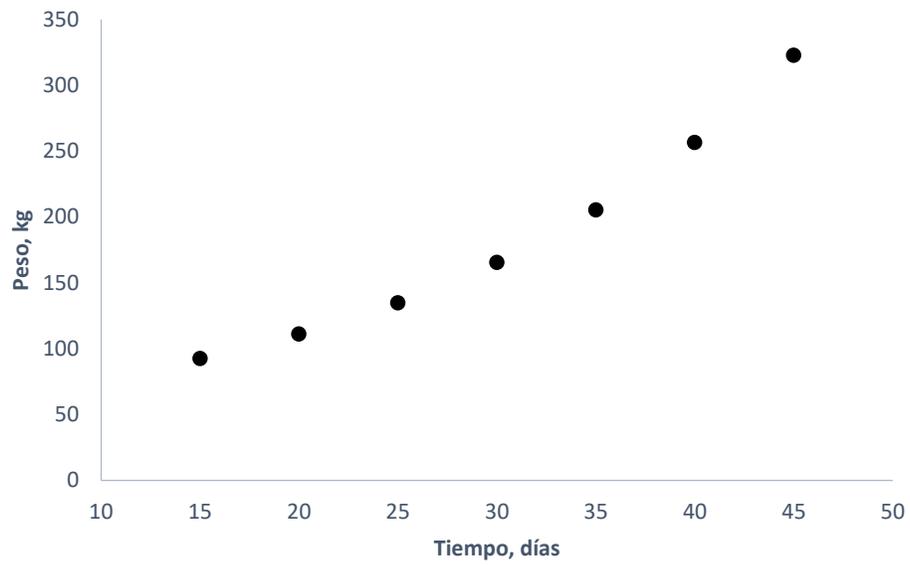


Gráfica 3. Curva de crecimiento de raza Blackbelly

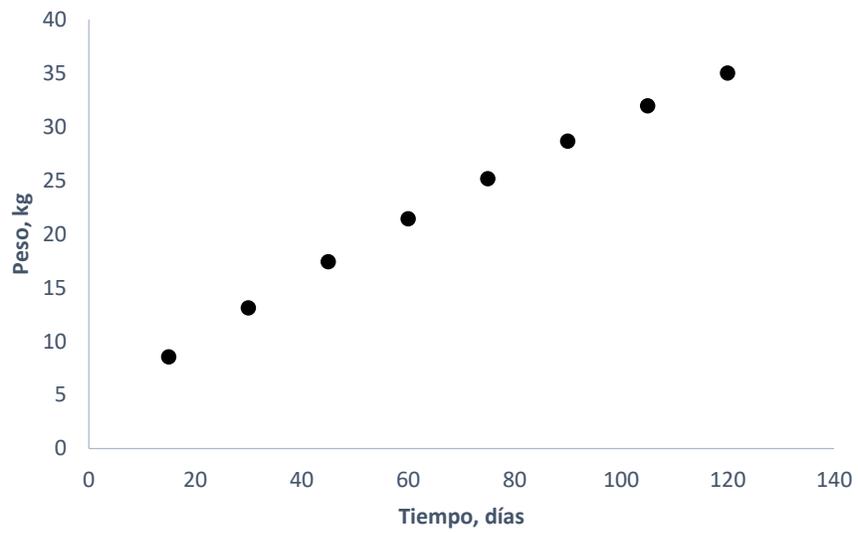
Las siguientes gráficas, representan los modelos con gráfica sigmoidea, la cual no se detecta un claro crecimiento constante, en el cual la aceleración permanezca constante, tal es el caso de la Gráfica 4, que muestra el comportamiento del modelo Logistic en la raza Dorper con razas Brasileñas, teniendo con claridad una curva creciente con los datos gráficos. El modelo Logistic permite interpretar aquellos datos que muestren un crecimiento muy notorio en la ganancia de peso con el paso de los días, teniendo aumentos en varias unidades. Los valores de los parámetros en este modelo son 29.35, 0.0179 y 2.858.

A diferencia del modelo Logistic graficado en la Gráfica 4, la Gráfica 5 representa el modelo Meloun III y expresa un comportamiento que si bien es creciente, no posee la misma velocidad de crecimiento que el modelo Logistic, puesto que como ya se mencionó, crece de manera muy acelerada con tendencia hacia el infinito con valores fuera de un verdadero contexto biológico. Se tiende a la linealidad.

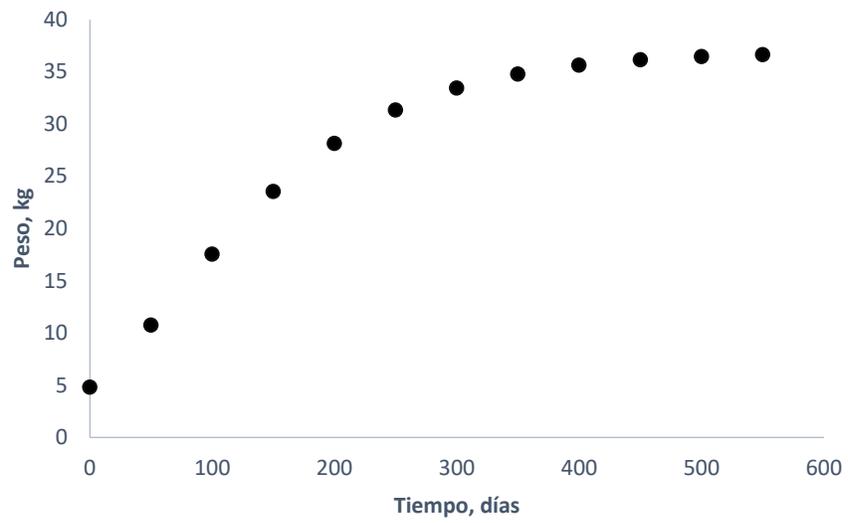
En la gráfica 6, se puede observar a la raza Mengali ajustada con un modelo Gompertz con una curva de crecimiento con tendencia a la linealidad (no olvidar que todas son exponenciales) cuando el valor de t es bajo. Cuando t es mayor, la curva va siendo más notoria. Este modelo presenta un comportamiento similar a la curva del modelo Brody.



Gráfica 4. Curva de crecimiento de raza Dorper con razas Brasileñas modelo Logistic



Gráfica 5. Curva de crecimiento de raza Dorper modelo Meloun III

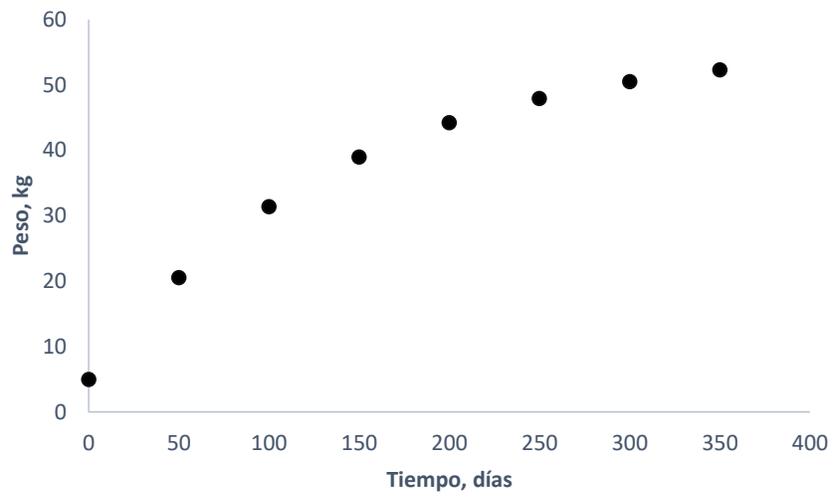


Gráfica 6. Curva de crecimiento de raza Mengali modelo Gompertz

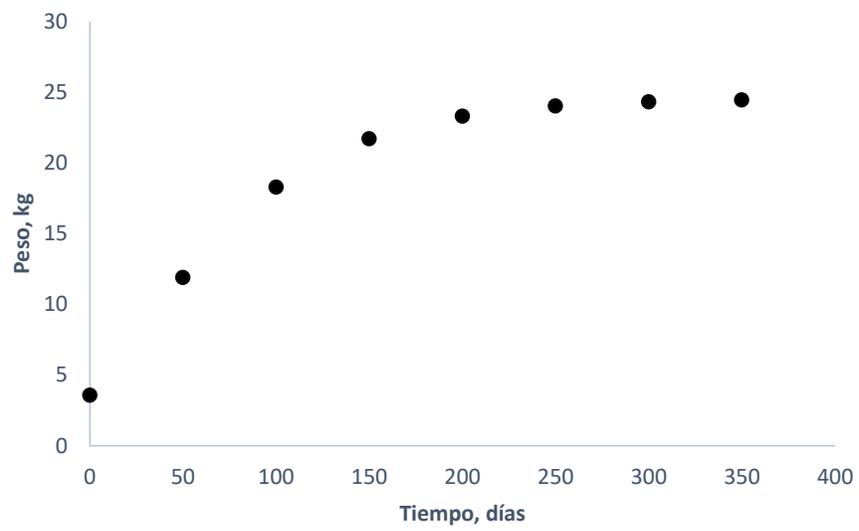
Se puede observar en la gráfica 7 el ajuste del modelo Mitscherlich a la raza Rambouillet, con una curva con tendencia al alza, semejante a todos los modelos analizados con anterioridad. Cuando t es pequeña los valores son más distanciados a cuando el valor de t va en aumento, de igual manera al inicio de la gráfica se puede detectar poca suavidad de la curva de ganancia de peso.

El modelo Richards, Gráfica 8, presenta un comportamiento semejante al Mitscherlich en la raza Rambouillet: alto crecimiento al inicio cuando el valor de t es cercano a cero, y un crecimiento muy moderado a consecuencia del aumento de t .

Se debe mencionar que la mayoría de las curvas no tienen un claro comportamiento sigmoideal por la falta de datos, sin embargo, se puede detectar un comportamiento semejante al de tal onda. La raza Blackbelly aceptó como más adecuado 3 modelos (Meloun I, Meloun III y Mitscherlich), los cuales tienden tendencia sigmoideal. El cordero sureño, en dos diferentes artículos, se sugieren modelos con curva de crecimiento diferentes, uno de crecimiento constante (Bertalanffy) y otro sigmoideal (Logístico). Otro caso semejante, en el cual para la misma raza se eligieron dos modelos distintos con curvas diferentes es el Iranian Guilan, ya que en el caso de la hembra sigue un comportamiento sigmoideal, mientras que para el macho tiene una curva constante. Las razas Santa Inés y la Suffolk presentan una situación igual a la mencionada, en la cual en diferentes estudios se optaron funciones con diferente tipo de crecimiento, Bertalanffy y Richards y Gompertz y Bertalanffy respectivamente.



Gráfica 7. Curva de crecimiento de raza Rambouillet modelos Mitscherlich



Gráfica 8. Curva de crecimiento de raza Santa Inés modelos Richards

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis del crecimiento de ovinos se tiene gran variabilidad de acuerdo con varios aspectos tales como el tamaño de muestra, la raza de borrego considerada en el estudio, las condiciones generales de vida del mismo, así como el sexo y la experiencia del investigador. Si bien, todos los modelos elegidos como mejores de acuerdo a los datos obtenidos poseen altos valores en el coeficiente de determinación (valores cercanos al 90%), todos responden a un tipo de datos en específico; por ejemplo para los corderos nacidos en otoño según Aman Ullah en el 2013, el modelo Brody describe en un 99.6% a los datos, considerando que este modelo elegido como el de mejor ajuste, otorga un peso de 40.88 kg, siendo el de mayor valor estimado para el peso adulto de los modelos comparados. En cuanto a las estimaciones para la tasa de crecimiento es el que otorga el menor valor (0.14) con respecto a los otros modelos. En este caso no se consideró ningún modelo de cuatro parámetros, descartando así la identificación del punto de inflexión. Para los nacidos en primavera, el modelo Brody también es el que se ajusta mejor a los borregos. A diferencia de los nacidos en otoño, para los nacidos en primavera, el peso adulto es mayor (43.32 kg) pero da un valor menor a la tasa de crecimiento (0.13).

Según el mismo autor, que realizó varias investigaciones con diversas especificaciones, el mejor modelo para describir el crecimiento del borrego comercial, tanto para los machos como para las hembras es el Brody, el cual explica en un 99.6% los datos. Para los machos se otorga un peso adulto de 42.91

kg para machos y 34.81 kg para hembras, de igual manera el valor de su tasa de crecimiento es el menor con un 0.14 y 0.13 respectivamente. De la raza en cuestión, comparando a los nacidos solos contra los nacidos en par, los modelos no son los mismos al momento de elegir aquel con el mejor ajuste. Para los nacidos solos, el modelo Brody lo ajusta mejor, mientras que para los nacidos gemelos el Bertalanffy. Es importante notar que los nacidos solos tienen un mayor valor en el peso adulto con respecto a los nacidos gemelos al igual que poseen un número más grande en la tasa de crecimiento, todo eso según los estudios de Aman Ullah.

En cuestión de razas, Topal en el 2014 comparo el comportamiento con relación a su crecimiento, de los borregos Morkaraman y los Awassi seleccionando aquel modelo con mejor ajuste a Gompertz y Bertalanffy respectivamente. En esta ocasión el coeficiente de determinación no fue concluyente para la elección de los modelos (todos los valores se encontraban entre 0.98 y 0.99) por lo que al observar el cuadrado medio del error (MSE) se optó por la elección de los mencionados por contar con los valores más bajos. Para el Morkaraman el peso a la maduración se le dio un valor de 41.4 (+-1.2) mientras que al Awassi de 41.7 (+-1.1). Con relación a la tasa de crecimiento se le da un mayor valor al Morkaraman (0.012 vs 0.01) que al Awassi. Para la raza Babarine, según estudios de Ben Hamouda, tanto el modelo Brody como el modelo de Bertalanffy ofrecen un mejor ajuste (el coeficiente de determinación, que fue el criterio utilizado para la elección del modelo es prácticamente el mismo). El peso adulto surgido del modelo de Brody es de 46.89 +- 77.35 y por

Bertalanffy 26.4 ± 15.63 , y la tasa de crecimiento varia únicamente en centésimas. Bertalanffy otorga un valor del peso al punto de inflexión con valor de $\frac{8A}{27} = 0.29A$ siendo A el valor máximo de Y. en relación a la raza Baluchi, Bahreini analizó dos artículos, en una de ellos se sugiere como alternativa el Artificial Neural Networks a los modelos no lineales tradicionales, siendo escogido por su alto valor en el coeficiente de determinación, así como valores bajos en el error cuadrático medio (MSE) y en la desviación media absoluta (MAD). Este trabajo comparó este modelo (ANN) con los modelos tradicionales de 3 y 4 parámetros. De manera posterior, en el 2014 se sugirió el uso del modelo Brody para machos y hembras, por el ser el modelo más simple y fácil la interpretación biológica comparada con las otras curvas, haciendo una comparación del modelo como aleatorio contra un modelo mixto. En el modelo aleatorio el peso adulto, parámetro a, toma un valor de 47.62 y 43.45 para machos y hembras respectivamente, mientras que en la consideración del modelo como mixto son 47.8 y 42.68 los valores. La tasa de crecimiento tuvo el mismo valor para ambos sexos y ambos tipos de modelos. Se concluyó que el modelo logístico es aquel menos adecuado para el ajuste. El error en el modelo aleatorio es más alto que en el mixto, por lo que se estima que los valores de los parámetros en el modelo mixto son más cercanos a los valores reales de la raza Baluchi.

Canul, al estudiar la raza Blackbelly y utilizar los criterios de selección R^2 , AIC, DW, EPP y VEP eligió tanto el Meloun I, Meloun II y Mitscherlich como el de mejor ajuste ya que dieron valores exactamente iguales en los criterios comentados. El modelo logístico es aquel con menor calidad de ajuste y mayor

error a la predicción. Los modelos elegidos dan un valor de 58.2 (+0.94) al parámetro a y la tasa de maduración de 0.0039, siendo la única diferencia en el valor del parámetro de integración b . Para la raza Hampshire, el mismo autor, sugiere el uso del modelo Bertalanffy, el cual da un valor alto en R^2 y bajo en AIC. Este modelo subestima (EPP con valor negativo) las predicciones, sin embargo, fue el más adecuado. El que menos se sugiere el uso es nuevamente el logístico. Esta raza da un valor de peso adulto mayor al Blackbelly siendo de 61.9 kg y una tasa de crecimiento del orden de 1 milésima.

Según Canul, el modelo Bertalanffy es el más apropiado para la raza Pelibuey, la raza Katahdin y la Suffolk, siendo los valores del parámetro a 48.6, 52.5 y 64.9 kg respectivamente. La tasa de crecimiento tiene un mayor valor en aquellos con el parámetro a menor. En todos estos casos mencionados en el párrafo, según el error de predicción promedio, estos modelos subestima las predicciones pero describen de una manera muy buena los datos, valores muy altos para el coeficiente de determinación. A diferencia del trabajo realizado por Canul, Lewis en el 2002 sugiere que el modelo Gompertz se adapta mejor a la raza Suffolk. Lewis encontró eficiente el uso del modelo en cuestión ya que la función de crecimiento de Gompertz surge como una confirmación del crecimiento negativo y lineal del peso del animal en una escala logarítmica manejando el rango del peso de 4 kg cerca del nacimiento a 80 kg a 150 días del mismo. Es importante hacer notar que Lewis consideró únicamente 1934 observaciones, mientras que Canul 19129.

Canul, *et al.*, y Kariuki, *et al.*, (2010) estudiaron el comportamiento con relación a la ganancia de peso de los borregos Dorper, sugiriendo el uso de los modelos Meloun I, Meloun III, Mitscherlich y el Animal Modern Model; 8922 observaciones fueron consideradas por parte de Kariuki, mientras que 54784 se obtuvieron para las investigaciones de Canul. Considerando los modelos no lineales tradicionales, Canul obtuvo un peso adulto para los Dorper de 58.2, así como un parámetro k de 0.0039 al aplicar los tres primeros modelos mencionados; Kariuki, sugiere el uso de modelos aleatorios para la rutina genética de evaluación para el borrego Dorper en Kenya (país en el cual se obtuvieron los datos en cuestión).

Lupi, *et al.* (2015), en diversas ocasiones ha estudiado el comportamiento del cordero Segureño en relación al peso ganado con el aumento del tiempo obteniendo varios modelos sugeribles. En un momento, se obtuvo información de la Asociación Nacional de Criaderos de Ovino Segureño entre el año 2000 y 2014, sumando 353031 observaciones para identificar y describir cómo afectan los factores no genéticos en la curva de crecimiento del cordero utilizando la función logística. En esta ocasión, los valores del parámetro a que representa el valor asintótico de la función cuando el tiempo tiende al infinito (independiente de problemas de fluctuación debido a efectos genéticos y ambientales), fueron 35.329 para machos y 34.024 para hembras, y k 0.027 y 0.026. Lupi en otro artículo de los publicados analizó los modelos no lineales para describir el comportamiento de crecimiento de nuevo del cordero Segureño (una de las razas más importantes españolas) con 129610 observaciones, identificando al modelo

Bertalanffy (seguido del logístico) como el mejor para describir la curva de crecimiento tanto para los machos como para las hembras. En el análisis Lupi, *et al.* (2015) destacó que la ecuación de Brody se encontró como inadecuada para estudiar lo ya mencionado. El peso asintótico de las hembras posee un valor de 48.877 kg, mientras que en los machos de 67.707 kg, más la tasa de crecimiento es mayor en las hembras que en los machos, indicando así que estas logran la madurez a menor edad que ellos.

La raza brasileña Santa Inés se analizó en 3 de los artículos citados en este escrito, siendo el modelo de Richards el elegido como el que otorga el mejor ajuste en 2 de las ocasiones y Bertalanffy en la restante. Para Braga Lobo y Rocha Sarmiento, ambos con estudios publicados en el 2006, el modelo de Richards se adapta mejor a la raza Santa Inés (para el segundo autor el segundo modelo sugerido correspondería a Bertalanffy). Los valores obtenidos por ambos para los parámetros de la ecuación de Richards son muy distantes (54.38 y 24.5494), alejándose al logrado por el modelo de Bertalanffy de 122.2 kg, siendo importante, para futuros estudios, investigar con profundidad las diferencias de diversos aspectos de los borregos tomados para el estudio para comprender la razón de las diferencias tan notorias. Con relación al valor de la tasa de crecimiento, Aciocili Da Silva (2011) le da un valor de 0.00495 en el modelo de Bertalanffy, mientras que Braga de -0.00144 y Rocha de 0.0171. Un dato interesante a mencionar con esta raza es que en el estudio de Rocha, *et al.* (2006) el coeficiente de determinación posee un valor de únicamente 0.72 mientras que

Braga de 0.82, a diferencia de Aciocili de 0.9783, otorgándole mayor certidumbre a su investigación.

Haciendo nuevamente una comparación entre ambos sexos de una misma especie, Gbangboche en el 2008 publicó en la raza West African Dwarf, eligiendo para ambos el modelo de Brody como aquel con más exactitud para el manejo y descripción de sus datos. Las diferencias entre los sexos vienen dadas por los valores obtenidos por los parámetros, los cuales son 47.1 y 45.4 kg para machos y hembras. Consideremos que su valor de tasa de crecimiento es prácticamente el mismo con variación en una centésima. De la misma forma Kopolzu, *et al.* (2014) analizó las diferencias entre machos y hembras de la raza Hemsin, obteniendo 61.9 y 60.79 como los valores del peso asintótico en machos y hembras, todo ello con el modelo de Brody elegido como el más adecuado. Hossein Zadeh en el 2016, al igual que los científicos mencionados en el último párrafo, analizó los dos sexos de la misma raza (Iranian Guilan) para determinar sus valores paramétricos. Para los machos eligió, con apoyo de los criterios de selección, Richards para las hembras y Brody para los machos. De manera anterior, en el 2011, al analizar la raza Iranian Shall estableció para ambos sexos el modelo de Richards.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El uso de estadística en las diferentes áreas del conocimiento permite dar solución a problemas específicos, lo que da opción a la toma de decisiones adecuada. Todas aquellas herramientas estadísticas que puedan ser usadas para explicar un fenómeno o bien predecir un comportamiento son de gran utilidad. Para buscar que las competencias desarrolladas en la maestría profesional en estadística dieran solución a alguna problemática planteada se decidió apoyar en el análisis de documentos varios para procesar información del crecimiento animal, de manera precisa en ovinos. Ha sido de gran interés observar como las matemáticas, específicamente estadística, son útiles en la facultad en la cual se desarrolló este escrito. Dentro de la facultad de Zootecnia y Ecología se procura la investigación científica, por lo que se espera sea de utilidad este análisis para el área en cuestión.

Los trabajos revisados, en su gran mayoría, seguían todos los pasos adecuados para elegir el modelo con mejor ajuste para la raza en estudio, algunos de los artículos ya tenían elegido el mejor modelo, probablemente encontrado en investigaciones previas o apoyados de literatura. Como se mencionó, gran parte de los trabajos contaban con procedimientos señalados para el análisis, selección y ajuste de modelos no lineales en el crecimiento animal. Estos procedimientos, si bien llevaban hacia una conclusión aplicada en el crecimiento animal todo era basado en estadística aplicada.

El 58.82% de las razas se ajustan mejor a una curva de crecimiento continuo, mientras que a una curva sigmoide el 47.06% de las razas se ajustan a

ella. Se puede notar que una misma raza se ajusta a los dos tipos de curvas de crecimiento de acuerdo con el autor o a la investigación, por lo cual, como en el caso del borrego Santa Inés se ajusta a ambas curvas en diferentes investigaciones. Es de suma importancia el elegir el modelo que mejor ajuste a la raza, por lo tanto, es indispensable el utilizar todas aquellas herramientas que puedan auxiliar en la toma de tal decisión. Como se ha mencionado varios autores realizan todos los pasos para la mejor opción, todo esto buscando encontrar el mejor modelo para la raza en cuestión, y para los datos recabados. La elección del mejor modelo puede llevar a tomar decisiones acertadas lo que se puede traducir en varias ventajas dentro del área como la elección del mejor alimento, el mejoramiento genético, entre otros aspectos, de igual manera el no elegir el mejor modelo puede llevar a considerar aspectos del crecimiento ovino incorrectos, trayendo consigo grandes consecuencias en el contexto.

LITERATURA CITADA

- Acioli, L. Bossi, A. De Lima, F. Mendes, P. Medeiros, R. Tonhati, H. Da Costa, C. 2012. Growth curve in Santa Ines sheep. *Small Ruminant Research*. 182-185.
- Acuña, E. 2010. *Regresión lineal*. Universidad de Puerto Rico. Mayagüez.
- Agudelo, D. Ceron, M. Restrepo, L. 2007. Modelación de funciones de crecimiento aplicadas a la producción animal. *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias*. 20:157-173.
- Álvarez, A. 2005. *Fisiología de crecimiento*. Universidad de la República. Uruguay.
- Aman Ullah, M. Amin, M. Ansar, M. 2013. Non linear Regression Models to Predict the Lamb and Sheep Weight Growth. *Pakistan Journal of Nutrition* 12(9): 865-869.
- Bahreini, M. Aslaminejad, A. Sharifi, A. Siminer, H. 2014. Comparison of Mathematical Models for Describing the Growth of Baluchi Sheep. *J. Agr. Sci. Tech*. Vol 14: 57-68.
- Bahreini, M. Asghar, A. 2010. A Comparison of Neural Network and Nonlinear Regression Predictions of Sheep Growth. *Journal of Animal and Veterinary Advances* 9(16): 2128-2131.

- Bates, D. Watts, D. 1988. Nonlinear Regression Analysis and its Applications. Universidad de Wisconsin & Queen's University. Estados Unidos de América.
- Bathaei, S. Leroy, P. 1996. Growth and mature weight of Mehraban Iranian fat tailed sheep. Small Ruminant Research. 155-162.
- Ben Hamouda, M. Atti, N. 2011. Comparison of growth curves of lamb fat tail measurements and the relationship with body weight in Babarine sheep. Mal Ruminant Researc. 120-127.
- Braga, R. Vasquez, L. Bezerra, A. De Sousa, J. De Oliveira, A. 2006. Parâmetros genéticos de características estimadas da curva de crescimento de ovinos da raça Santa Inês. Revista Brasileira de Zootecnia. V. 35, n.3, p. 1012-1019.
- Brown, J. Fitzhugh, H. Cartwright, T. 1976. A comparison of nonlinear models for describing weightage relationships in cattle. j. Anim. Sci., 42(4):810- 818.
- Campos, D. De Soua, G. Lopes, L. Souza, A. Souza, P. 2011. Modelos de curvas de crescimento para ovinos cruzados. Revista da estatística UFOP, Vol I.
- Canul, E. Domínguez, J. Rodríguez, F. Ortega, J. Callejas, N. 2019. Evaluación de modelos no lineales para caracterizar el crecimiento de siete razas de ovinos en México. Universidad Autónoma de Chihuahua. México.
- Cazonatto, A. Da Silva, W. 2017. Comparing non-linear mathematical models to describe growth of different animals. Acta Scientiarum Animal Sciences.

- Cortes, O. 2004. Aplicación del método de Levenberg-Marquardt y del gradiente conjugado en la estimación de la generación de calor de un aparato de placa caliente con guarda. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico. México.
- De Andrade, L. Souza, P. Mendes, C. Fonseca, F. Gomes, F. 2013. Traditional and alternative nonlinear models for estimating the growth of Morada Nova sheep. *Revista Brasileira de Zootecnia*. V. 42, n.9, p.651-655.
- Duarte, T. De Ordaz, L. 2016. Caracterización de las curvas de crecimiento del ovino segureño en sistemas convencionales y orgánicos. Universidad de Córdoba. España.
- Espinoza, J. Ceró, A. Guerra, D. Et al. 2015. Factores ambientales y parâmetros genéticos para algunas características reproductivas en bovinos Chacuba. *Revista Mexicana de Ciencia Pecuaria*. 6(4):431-441.
- Gbangboche, A. Glele, R. Salifou, S. Albuquerque, L. Leroy, P. 2008. Comparison of non linear growht models to describe the growht curve in West African Dwarf sheep. *The animal Consortium* 2:7 pp 1003-1012.
- Goyache, F. 2005. Crecimientos, consumos y medidas corporales. Universidad Complutense de Madrid. España.
- Hamouda, M. Atti, N. 2011. Comparison of growth curves of lamb tail measurements and their relationship with body weight in Babarine sheep. *Small Ruminant Research*. 120-127.

- Hernández, J. Rincón, J. 2016. Modelación del crecimiento en el ganado blanco orejinegro (Bon) mediante modelos no lineales y un modelo lineal. Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia.
- Hossein-Zadeh, N. 2015. Comparación de modelos no lineales para describir el crecimiento de ovejas iraní Guilan. Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias. 199-209.
- Hossein, N. 2015. Modeling the growth curve of Iranian Shall sheep using non-linear growth models. Small Ruminant Research. 60-66.
- Khan M. K. I., H. T. Blair and N. Lopez-Villalobos. 2012. Lactation curves of different cattle breeds under cooperative dairying conditions in Bangladesh. Journal of Applied Animal Research, 40(3): 179-185.
- Kariuki, C. Ilatsia, E. Wasike, C. Kosgey, I. Kahi, A. 2010. Genetic evaluation of growth of Dorper sheep in semi-arid Kenya using random regression models. Small Ruminant Research. 126-134.
- Keskin, I. Dag, B. Sariyel, V. Gokmen, M. 2009. Estimation of growth curve parameters in Konya Merino sheep. South African Journal of Animal Science 39(2).
- Kopuzlu, S. Sezgin, E. Esenbuga, N. Cevdet, O. 2014. Estimation of growth curve characteristics of Hemsin male and female sheep. Journal of Applied Animal Research, 42:2, 228-232.

- Lambe, N. Navajas, E. Simm, G. Bünger, L. A genetic investigation of various growth models to describe growth of lambs of two contrasting breeds. *Journal of Animal Science*. 84: 2642-2654.
- León, O. Quiroz, J. Villalobos, A. Prazeres, P. Puntas, J. Delgado, J. 2006. Uso de modelos no lineales para el ajuste de la curva de crecimiento de Corderos Segureños a la edad de sacrificio. España.
- Lewis, R. Emmans, G. Dingwall, W. Simm, G. 2002. A description of the growth of sheep and its genetic analysis. *Animal Science*. 74:51:62.
- Lin L. 1989. A concordance correlation coefficient to evaluate reproducibility. *Biometrics*, 45: 255-268.
- Lupi, T. León, J. Nogales, S. Barba, C. Delgado, J. 2015. Genetic parameters of traits associated with the growth curve in Segureña sheep. The Animal Consortium. Page 1 of 7.
- Lupi, T. León, J. Nogales, S. Delgado, J. 2015. Estudio de factores no genéticos sobre los parámetros de la función logística en la curva de crecimiento comercial del cordero segureño. *Actas Iberoamericanas de Conservación Animal*. AICA 6 308-316.
- Lupi, T. León, J. Nogales, S. Barba, C. Delgado, J. Barba, C. 2015. Characterization of comercial and biological growth curves in the Segureña sheep breed. The Animal Consortium. 9:8 pp 1341-1348.
- Macías, D. 2018. Método del Gradiente. Universidad Politécnica de Altamira. España.

- Malhado, C. Carnerio, P. Affonso, P. Souza, A. Sarmiento, J. 2009. Growth curves in Dorper sheep crossed with the local Brazilian breeds, Morada Nova, Rabo Largo, and Santa Ines. *Small Ruminant Research*. 16-21.
- Malhado, C. Ramos, A. Carneiro, P. Souza, J. Wechsler, F. Eler, J. Azevêdo, D. Sereno, J. 2011. Modelos no lineales para describir el crecimiento de bufalinos de la raza Murrah. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. Brasil.
- Masood, M. Iqbal, F. Eydurán, E. Ahmad, M. Huma, Z. Waheed, A. 2013. Comparison of Non-Linear Functions to Describe the Growth in Mengali Sheep Breed of Balochistan.
- Meerschaert, M. 2012. *Mathematical Modelling*. Michigan State University. Estados Unidos de América.
- Parés, P. Kucherova, I. 2014. Comparación de modelos no lineales para describir curvas de crecimiento en la Cabra Catalana. *Revista Investigación Veterinaria Perú*. 25(3):390-398.
- Rivas, G. López, L. 1987. Regresión no lineal. *Revista Colombiana de Estadística*. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.
- Rocha, J. Regazzi, A. De Sousa, W. De Almeida, R. Cristina, F. De Oliveira, G. 2006. Estudo da curva de crescimento de ovinos Santa Inês. *Revista Brasileira de Zootecnia*. V. 35, n.2, p. 435-442.
- Santibáñez, J. 2017. Regresión lineal múltiple: intervalos de confianza y prueba de hipótesis. Universidad Autónoma de México. México.

- Sarango, M. Cabrera, A. Cuenca, F. 2008. Modelo de ecuaciones lineales y no lineales. Universidad Técnica Particular de Loja. Ecuador.
- Tariq, M. Iqbal, F. Eyduran, E. Bajwa, M. Huma, Z. Waheed, A. 2013. Comparison of Non Linear Functions to Describe the Growth in Mengali Sheep Breed of Balochistan. Pakistan J, Zool. Vol 45(3), pp. 661-665.
- Tariq, M. Bajwa, M. Walheed, A. Eyduran, E. Abbas, F. Bokhari, F. Akbar, A. 2011. Growth curve in Mengali Sheep Breed of Bacholistan. The Journal of Animal & Plant Sciences, 21(1), page 5-7.
- Topal, M. Ozdemir, M. Aksakal, V. Yildiz, N. Dogru, U. 2004. Determination of the best nonlinear function in order to estimate growth in Morkaraman and Awassi lambs. Small Ruminant Research. 229-232.
- UAM Cuajimalpa. 2020. Algoritmo Newton Raphson. Recuperado de <http://test.cua.uam.mx/MN/Methods/Raices/NewtonRaphson/NewtonRaphson.php> el 17 de junio del 2020.
- Zaragoza, C. 1998. Crecimiento, desarrollo y precocidad. Recuperado de http://www.remugants.cat/8/upload/carn_creixement_precocitat_c_zaragoza.pdf el 22 de enero del 2020.